PSICOGÉNESIS E HISTORIA DE LA CIENCIA

jean piaget
rolando garcía





siglo
veintiuno
editores

PSICOGÉNESIS E HISTORIA DE LA CIENCIA

por

JEAN PIAGET
y
ROLANDO GARCÍA





siglo xxi editores, s. a. de c. v.
CERRO DEL AGUA 248, ROMERO DE TERREROS, 04310, MEXICO, D.F.

siglo xxi editores, s. a.
TUCUMÁN 1621, 7 N, C1050AAG, BUENOS AIRES, ARGENTINA

siglo xxi de españa editores, s. a.
MENÉNDEZ PIDAL 3 BIS, 28036, MADRID, ESPAÑA

el título original de este libro es *psychogenèse et histoire de la science* y la versión española se debe al coautor de la obra rolando garcía

edición al cuidado de presentacion pinero
portada de anhelo hernández

primera edición, 1982
undécima edición en español, 2008

isbn 978-968-23-1156-7

ÍNDICE

PREFACIO

Los autores de este libro me han pedido que redacte una breve introducción para esta obra, que es el coronamiento de un tipo de colaboración único en su tipo entre dos epistemólogos (uno de ellos psicólogo y el otro físico), obra que Piaget tuvo la gran satisfacción de ver terminada inmediatamente antes de la enfermedad que debía acabar con su vida.

He tenido —a partir de 1967— el emocionante privilegio de ser testigo de los constantes intercambios que presidieron a la gestación y a la elaboración de *Psicogénesis e historia de la ciencia,* de los cuales perdura el reflejo en los diferentes capítulos a los cuales los autores han impreso su marca personal. Quisiera señalar que tanto el pensamiento de Piaget como el de García se han enriquecido y modificado gracias a este contacto mutuo.

Toda la obra de Piaget ha estado consagrada a la creación de una epistemología genética que sacara provecho del método histórico-crítico y que se apoyara sobre el método psicogenético. Su visión de la génesis del conocimiento en el niño, refinada y profundizada por el estudio histórico del pensamiento científico, se fue renovando sin cesar, hasta llegar a la obra contenida en este libro.

Recíprocamente, Rolando García, discípulo de Carnap y de Reichenbach, que descubrió luego, gracias a Piaget, los datos tan ricos y demostrativos de la psicogénesis de las representaciones del universo en el niño, fue conducido a considerar de manera diferente la evolución del pensamiento científico, desde la Antigüedad griega hasta la revolución newtoniana. En este texto estudia algunos capítulos de esta historia, donde los mecanismos de progreso resultaban más claros.

La preocupación de los autores no se limitó en modo alguno al examen de los contenidos paralelos de sus dos campos de estudio. Tratando de extraer los procesos inherentes a toda construcción de conocimiento, ambos —cada uno en su propio campo— subordinaban la psicogénesis y la historia de la ciencia a la verificación de la hipótesis de una epistemología constructivista.

Considero que esta obra constituye —en el conjunto de la obra de Jean Piaget y de sus colaboradores— la tercera y la más importante síntesis epistemológica.

En la primera síntesis, *Introducción a la epistemología genética*

[1950][1] —que representaba ya, en ese momento, un compendio enciclopédico— Piaget interpretaba, según la óptica de las epistemologías clásicas, el resultado de sus investigaciones psicogenéticas sobre las categorías del pensamiento (número, cantidad física, espacio, tiempo, etc.) y mostraba tanto la insuficiencia del idealismo apriorista como del realismo empírico. Allí insistía sobre la necesidad de estudiar los procesos de transformación del conocimiento —en la ontogénesis o en la historia— para dar un estatus científico a la epistemología: "La naturaleza de una realidad viva no se revela únicamente por sus estadios iniciales ni por sus estadios terminales, sino por el proceso mismo de sus transformaciones; es la ley de construcción, es decir, el sistema operatorio en su constitución progresiva." El progreso de los conocimientos es lo único que permitirá determinar la contribución respectiva del sujeto y del objeto.

Es sorprendente observar que, desde la introducción a la disciplina que marca la orientación fundamental de toda su obra, Piaget considera que la epistemología "debe permanecer como ciencia abierta". Por otra parte, Piaget estaba persuadido de que una epistemología que quisiera ser científica —es decir, comunicable independientemente de las tradiciones de escuela— sólo podía resultar de una colaboración interdisciplinaria. Por eso recibió con gran placer al gran lógico y matemático Evert W. Beth (lamentablemente fallecido cuando aún se esperaba mucho de él) quien, después de haber criticado severamente los intentos de formalización de Piaget, acepta colaborar con él, y juntos escriben, en 1961, *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.*[2] En esta obra, que representa la segunda síntesis de la epistemología tal como Piaget la concebía, Beth, al analizar los fundamentos de las matemáticas —y dejando establecido el principio de la autonomía necesaria de la lógica y de la psicología del conocimiento—, se asocia al punto de vista de Piaget para quien la epistemología explica cómo el pensamiento real del hombre puede producir la ciencia en tanto sistema coherente de conocimiento objetivo. Por su parte, Piaget trata de demostrar que las estructuras cognitivas derivan de los mecanismos más generales de la coordinación de las acciones. Ambos autores llegan a la conclusión de que las normas elaboradas por el sujeto epistémico en el curso de su génesis serían comparables a las normas inherentes al pensamiento científico. Esta obra constituye así una culminación provisoria de las puestas en relación de los modelos formales con el pensamiento real, que caracterizan el período "estructuralista" de la obra piagetiana.

[1] París, PUF, 1950 [versión en español: Buenos Aires, Paidós, 1975].

[2] *Études d'epistémologie génétique,* vol. XIV, París, PUF, 1961 [versión en español: Madrid, Ciencia Nueva, 1960].

Es con un nuevo impulso que Piaget inicia luego la tercera etapa de sus investigaciones, abordando dos grandes problemas que habían quedado en suspenso: el pensamiento físico y la reformulación completa de una teoría de los mecanismos del desarrollo.

El estudio de *Las teorías de la causalidad*[3] reunió a teóricos como Rosenfeld, Bunge, Kuhn, Halbwachs, y más tarde García, e incitó a los psicólogos a emprender un conjunto de investigaciones que condujeron, en particular, a la obra de Piaget y García *Las explicaciones causales* [1971].[4]

La génesis de las explicaciones causales condujo a Piaget a centrarse más sobre el papel del objeto en la formación de las operaciones del pensamiento y a desarrollar un interaccionismo integral. La epistemología genética de las categorías del conocimiento había sido completada, y los modelos lógico-matemáticos que servían de instrumentos estructurales para su análisis habían sido forjados. Había llegado, pues, el momento de profundizar en los mecanismos mismos del progreso del conocimiento en el niño, cuya importancia destacará a través de un estudio comparativo con la historia de las ciencias.

Los mecanismos del progreso del conocimiento pueden ser aprehendidos en las transiciones que conducen de un nivel de organización de menor adaptación del sujeto al medio (en tanto medio por conocer), a los niveles secundarios ulteriores. Piaget ha intentado dar cuenta de esta superación o aumento del conocimiento por un modelo referido a los mecanismos biológicos: el de la equilibración. Este mecanismo, que obedece a una guía de origen endógeno, permite neutralizar las perturbaciones productoras de desequilibrios. Las reequilibraciones pueden ser fuente de novedades, en lugar de conducir necesariamente a una homeostasis. Los procesos particulares responsables de las superaciones de la integración de lo superado en formas nuevas de conocimiento son numerosos: la abstracción reflexiva y la generalización; la toma de conciencia y la tematización; la invención de posibles y las inferencias que conducen a la necesidad. Todos ellos son responsables de una evolución en espiral, de naturaleza dialéctica, que marca el papel importante de los desequilibrios que incitan al sujeto a readaptaciones productivas.

Esos mecanismos e instrumentos, ilustrados por numerosas conductas del niño cuando resuelve problemas, han resultado ser de una naturaleza tan general que sirven como heurística para un análisis profundo de las secuencias históricas de ciertas evoluciones del pen-

[3] *Études d'epistémologie génétique*, vol. XXV, París, PUF, 1971 [versión en español: Salamanca, Sígueme, 1977].

[4] *Études d'epistémologie génétique*, vol. XXVI, París, PUF, 1971 [versión en español: Barcelona, Barral, 1973].

samiento matemático y físico. La intención de los autores en esta búsqueda de mecanismos generalizados no es, en modo alguno, describir correspondencias término a término, ni menos aún suponer una recapitulación de la filogénesis en la ontogénesis, ni tampoco el detenerse en la puesta en evidencia de analogías de sucesión. Lo que intentan saber es si los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente, en el contexto de un sistema nocional, son análogos a los mecanismos de pasaje de un estadio genético a sus sucesores. Los ejemplos más sobresalientes son, sin duda, las explicaciones sucesivas que los niños dan de la transmisión del movimiento, que se elaboran en función de las operaciones de su propio pensamiento, y son comparables a las explicaciones del *impetus* dadas en épocas sucesivas por diferentes pensadores, de Aristóteles a Buridan y Benedetti. Lo esencial del trabajo se refiere al porqué de tales encadenamientos secuenciales en el pensamiento humano. Más importante epistemológicamente, y más imprevisto, es el descubrimiento de un proceso general que conduce de un análisis intra-objetal, o análisis de los objetos, al análisis que se podría llamar inter-objetal, que estudia las relaciones o transformaciones entre objetos, para llegar finalmente al análisis que los autores llaman trans-objetal, relativo a las construcciones de estructuras.

En la historia de la geometría, García distingue tres etapas: *a*] la geometría del pensamiento griego hasta el siglo XVIII; *b*] la geometría proyectiva de Poncelet y Chasles; y *c*] la concepción global de la geometría introducida por Klein. La geometría descriptiva de Descartes y Fermat y el cálculo diferencial e integral proveen los instrumentos que permiten la transición de *a*] a *b*], en tanto que la teoría de los grupos hace lo mismo con respecto a la transición de *b*] a *c*]. Las similitudes entre esos progresos comprobados a través de los siglos, y las representaciones espaciales y geométricas del niño, que van de las intuiciones topológicas a la construcción de sistemas de referencia abstractos, pasando por la elaboración de nociones proyectivas, plantean problemas fecundos a una epistemología constructivista.

Ya sea que se trate de las filiaciones secuenciales de los descubrimientos y conocimientos humanos en los dominios del álgebra y de la geometría, o en los diferentes sectores de la física —particularmente en la mecánica— los datos observados y analizados por Piaget y García plantean sin cesar problemas epistemológicos nuevos. Así, gracias a la colaboración fecunda de esos dos grandes hombres de ciencia, esta obra maestra abre a la investigación caminos que sobrepasan las fronteras de la psicología y de la historia de la ciencia.

BÄRBEL INHELDER

ADVERTENCIA *

La versión original de este libro fue escrita en francés. La responsabilidad de la edición española es mía. La traducción de los capítulos redactados por Piaget no ha sido simple. En sus últimas obras su estilo se tornó cada vez más críptico. Con la seguridad de no desvirtuar en lo más mínimo su pensamiento, me tomé la libertad de apartarme muchas veces de una traducción directa, fragmentando en varios párrafos algunos excesivamente extensos y difíciles de interpretar. Es ésta la única vez que una obra de Piaget resulta publicada en otro idioma antes que en francés.

Deseo agradecer muy especialmente a Bärbel Inhelder, testigo y participante de muchas discusiones sobre los temas de este libro, quien tomó a su cargo la prolija revisión de las referencias en los capítulos sobre psicogénesis (tarea a la cual Piaget no estuvo nunca dispuesto a dedicarle tiempo). Para la puesta a punto del texto en francés la colaboración de Emilia Ferreiro ha sido inestimable. También agradezco a Hermine Sinclair y Pierre Spitz, quienes leyeron el manuscrito en francés e hicieron numerosas sugerencias para mejorar la redacción de los capítulos cuya responsabilidad me concierne.

Aunque la redacción se inició hacia 1974, la versión final es de 1980. Los análisis complementarios y la discusión sobre el detalle de los manuscritos tuvieron lugar en diversos tiempos (muchos de ellos "tiempos concentrados" de trabajo en la rústica cabaña de Piaget en los Alpes suizos). Como la epistemología no fue, en todo ese período, mi única ocupación, el libro tardó más de lo previsto en ser finalizado. Debo reconocer a Piaget una gran tolerancia en "respetar mis tiempos de trabajo", no obstante su fama de ser intolerante a este respecto, y a pesar de haber anunciado él mismo la aparición de este libro en varias oportunidades.**

Tengo, sin embargo, la satisfacción de haber podido revisar con Piaget hasta el último detalle de esta obra, y de haber recibido de

* Esta advertencia no apareció, por error o inadvertencia de los impresores, en las dos primeras ediciones. También queremos llamar la atención sobre la redacción de las últimas cinco líneas de la p. 241, que en las anteriores ediciones daba lugar a una interpretación errónea. [E. 1986]

** Véase, por ejemplo, J.C. Bringuier, *Conversaciones con Piaget*, Barcelona, Granica, 1977, pp. 164, 169, 176.

él —en nuestra última entrevista, cuando sin duda ya advertía que sus fuerzas declinaban muy rápidamente— el encargo de editarla.

ROLANDO GARCÍA

México, septiembre de 1982

INTRODUCCIÓN

La opinión más generalizada, tanto entre los hombres de ciencia como entre los historiadores de la ciencia, es que no existe ninguna relación entre la formación de las nociones y operaciones en los estadios más elementales, y su evolución en los niveles superiores. A esta opinión suele agregarse una creencia frecuente, aunque menos general: que la significación epistemológica de un instrumento de conocimiento es independiente de su modo de construcción, en tanto este último está vinculado a la historia y, eventualmente, a la psicogénesis, mientras que aquél depende del funcionamiento de este instrumento en un sistema sincrónico y actual de interacciones cognoscitivas, irreductibles, según esta hipótesis, a las consideraciones diacrónicas y, por ende, a sus etapas anteriores.

1. NIVELES DE DESARROLLO

El poco interés general por los estadios elementales del conocimiento proviene pues, sin lugar a duda, de la idea corriente según la cual el desarrollo de los conocimientos sería lineal, y cada etapa remplazaría así a la precedente, conservando ordinalmente algún vínculo con esta última, pero sin ninguna relación con las primeras.

En realidad, el proceso es muy diferente. En efecto, no sólo los estadios sucesivos de la construcción de las diferentes formas del saber son secuenciales —es decir, que cada uno es a la vez resultado de las posibilidades abiertas por el precedente y condición necesaria de la formación del siguiente—, sino, además, cada nuevo estadio comienza por una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los precedentes. De aquí resulta una integración, hasta los estadios superiores, de ciertos vínculos cuya naturaleza no se explica sino a través de un análisis de los estadios elementales.

La obra que aquí presentamos proveerá numerosos ejemplos de tales hechos, pero, a fin de fijar las ideas, anunciaremos un par de ellos, esquemáticamente. Con respecto al orden secuencial en el plano de la historia, se pueden citar tres grandes períodos en la historia de las matemáticas: el realismo estático de los griegos que se basa en estados permanentes (figuras y números), los cuales proveen un conjunto de conocimientos previos que eran necesarios para el descubrimiento de las transformaciones algebraicas e infinitesimales del siglo

XVII, cuyo análisis, a su vez, era indispensable para dar lugar a las estructuras propias de las matemáticas del siglo XIX y de nuestros días. Está claro que en el dominio físico los descubrimientos de hechos nuevos pueden modificar de manera variable el curso de las ideas y que éstas no presentarán tan claramente las mismas vecciones que en el dominio lógico-matemático.

En cuanto a las reorganizaciones nivel por nivel con integración de caracteres que se remontan hasta las fases iniciales, nuestra hipótesis general será la siguiente. En primer lugar, estableceremos una oposición entre la abstracción empírica, que extrae sus informaciones de los objetos mismos, y lo que llamaremos "abstracción reflexiva"[1] que procede a partir de las acciones y operaciones del sujeto. Esta segunda forma de abstracción tiene lugar a través de dos procesos necesariamente conjugados: *1*] un "reflejamiento" sobre un nivel superior (por ejemplo, de representación) de lo que se ha extraído de un nivel inferior (por ejemplo, de acción); y *2*] una "reflexión" que reconstruye y reorganiza, ampliándolo, lo que fue transferido por reflejamiento. En lo que respecta a la reflexión, es doblemente constructiva por dos razones complementarias. En primer lugar, el reflejamiento consiste en una puesta en correspondencia, y el mecanismo así puesto en marcha conduce, en el nivel superior, a nuevas correspondencias. Estas últimas asocian los contenidos transferidos con nuevos contenidos que son integrables en la estructura inicial, pero que permiten generalizarla. En segundo lugar, estos comienzos de morfismos conducen igualmente al descubrimiento de contenidos próximos, pero no directamente asimilables, a la estructura precedente: tiene entonces lugar una transformación que, por un proceso completivo, llega a integrar dicha estructura precedente, como subestructura de una estructura más amplia y, por consiguiente, parcialmente nueva. Este modo de construcción por abstracción reflexiva y generalización competitiva[2] se repite indefinidamente, nivel por nivel. El desarrollo cognoscitivo resulta así de la iteración de un mismo mecanismo, constantemente renovado y ampliado por la alternancia de agregados de nuevos contenidos y de elaboraciones de nuevas formas o estructuras. Esto explica por qué las construcciones más elevadas permanecen en parte solidarias de las más primitivas, en razón de este doble hecho: integraciones sucesivas e identidad funcional de un mecanismo, susceptible de repeticiones, pero que se renueva sin cesar en virtud de su repetición misma en niveles diferentes.

[1] J. Piaget y colab., *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, París, PUF, 1977, 2 vols., EEG 34 y 35.

[2] Decimos que hay "generalización completiva" cuando una estructura, conservando sus caracteres esenciales, se ve enriquecida por nuevos subsistemas que se agregan sin modificar los precedentes. Por ejemplo, la incorporación al álgebra de las álgebras no conmutativas que completan a las conmutativas.

A título de ejemplo muy general de este proceso (pero sin analizarlo aún en detalle, y limitándonos a dar sus resultados), se puede citar las relaciones entre el contenido de los observables y su forma lógico-matemática. La conquista de los hechos experimentales procede, seguramente, por aproximaciones sucesivas ligadas a la construcción de aparatos de registro. Éstos dependen, a su vez, de los modelos teóricos y de nuevos problemas que ellos suscitan. De aquí resulta una extensión progresiva de las escalas de observación en las dos direcciones (hacia escalas superiores y hacia escalas inferiores), y esto requiere, naturalmente, una reorganización necesaria cada vez que se procede a un nuevo refinamiento. La matematización cada vez más compleja de los observables, y sobre todo sus variaciones considerables en el curso de la historia, conducen así a dos creencias, de las cuales una está bien fundada, mientras que la otra es discutible y exige un examen de los hechos que se remonte a los estadios más elementales.

La primera creencia u opinión a que hacemos referencia consiste en afirmar que por mucho que sea matematizado un observable físico, en los niveles científicos, dicho observable corresponde sin embargo a un dato exterior al sujeto: esto equivale a decir que los objetos existen, aun cuando las aproximaciones que permiten acercarse a ellos no los alcancen jamás de manera exhaustiva, y que permanezcan, por consiguiente, en el estado de límites.

La segunda opinión frecuente es que si la matematización es obra del sujeto, y si el objeto existe, se debe poder trazar una frontera estable entre dicha matematización y los objetos, en cuyo caso un "hecho" físico, en cuanto tal, no llevaría consigo una dimensión lógico-matemática, sino que la recibiría posteriormente. Es aquí, sin embargo, donde se impone el análisis de las reacciones más primitivas. Tal análisis provee una respuesta decisiva: no solamente no existe frontera delimitable entre los aportes del sujeto y los del objeto (el conocimiento sólo llega a las interacciones entre ellos), sino que, además, uno no se aproxima jamás al objeto si no es en función de sucesivas logicizaciones y matematizaciones. Más aún, la objetividad misma va aumentando en la medida en que dichos procesos de logicización y matematización se van enriqueciendo. En efecto, el objeto elemental y perceptivo es en parte logicizado desde el comienzo, aunque es menos "objetivo" que el objeto elaborado. Esta logicización desde los comienzos se debe a que para recortar en objetos los cuadros perceptivos globales, y luego para atribuir a estos objetos la permanencia que les es constitutiva, es necesario que las acciones relativas a ellos se coordinen según formas asimilatorias de orden, de imbricación, de correspondencias, etc., que son ya de naturaleza lógico-matemática: la interdependencia de las relaciones espaciales, de las cuantificaciones (en más y en menos) de tales formas y de los contenidos, inac-

cesibles fuera de esos marcos debidos a las actividades cognoscitivas del sujeto, es pues general a todos los niveles y sólo puede ser verificada por el análisis psicogenético.

2. FORMACIÓN Y SIGNIFICACIÓN

Lo anterior nos conduce al problema central que será reanalizado sin cesar en esta obra: ¿la formación de los instrumentos cognoscitivos es de tal naturaleza que permite esclarecer la significación epistemológica que ellos poseen, o bien se trata de dos dominios heterogéneos, de los cuales uno pertenece a la psicología y a la historia mientras que el otro apela a métodos radicalmente independientes de aquéllas?

Aquí es necesario aclarar que el término "psicogénesis" da lugar a los malentendidos más perturbadores, y también más tenaces, en cuanto no se distinguen los dos problemas o terrenos de investigación siguientes: *1*] la psicogénesis de los conocimientos o estudio de la formación y de la naturaleza de los instrumentos cognoscitivos, en tanto están sometidos a las normas que se da o acepta el sujeto en sus actividades intelectuales (sean endógenas o referidas al objeto); y *2*] la psicogénesis de los procesos fácticos, en tanto que independientes de todo carácter normativo, es decir de la verdad o la falsedad (desde el punto de vista del sujeto), y sin más referencia que al funcionamiento psicofisiológico de los comportamientos (mecanismo material de las acciones, estados de conciencia, memoria, imágenes mentales, etc.). Resulta claro, entonces, que los autores que ponen en tela de juicio la importancia de la psicogénesis para la epistemología no vean sino este aspecto fáctico de los desarrollos, y olviden que en todos los niveles el sujeto obedece a normas cognoscitivas. El interés de estas últimas reside, sin embargo, en el dinamismo de sus construcciones sucesivas, para la constitución de todo conocimiento válido.

No se trata, por cierto, sino de normas precientíficas, pero el hecho fundamental para la epistemología de las ciencias es que el sujeto, partiendo de niveles muy bajos con estructuras prelógicas, arribará más tarde a normas racionales, isomorfas a aquellas que caracterizaron el nacimiento de las ciencias. Comprender el mecanismo de esta evolución de las normas precientíficas hasta su fusión con las del pensamiento científico incoactivo es, pues, un problema incontestablemente epistemológico. Por otra parte, este problema ha sido abordado a menudo, en el plano de la sociogénesis del conocimiento, con respecto a los números "naturales" (este término es, por sí mismo, el enunciado de un problema; ¡problema que también es nuestro!), a las clasificaciones, etc. El lógico E. W. Beth, poco sospechoso de tener un amor exagerado por la psicología, después de haber recordado la autonomía necesaria de la lógica (sin "psicologis-

mo") y de la psicología del conocimiento (sin "logicismo", puesto que las normas que se estudian son las del sujeto y no las del lógico), agrega: "Pero la situación es diferente si uno se sitúa en el punto de vista de la epistemología, en la medida en que esta disciplina se propone interpretar la ciencia en tanto resultado de la actividad mental del hombre o, lo que es lo mismo, explicar cómo el pensamiento real del hombre puede producir la ciencia como sistema coherente de conocimientos objetivos."[3]

En cuanto a precisar cómo el estudio de las normas cognoscitivas del sujeto permite llegar a los procesos propios de la constitución del saber, está claro que no habrá de recurrirse a declaraciones verbales, ni aun a un análisis de la toma de conciencia, sino esencialmente a un análisis de lo que "hace" el sujeto (por oposición a lo que piensa que hace) para adquirir y utilizar un conocimiento, o un "saber hacer", o para considerarlo como bien fundado. Puede ocurrir, entonces, que un mismo problema se presente sobre ambos terrenos, el de la epistemología de las ciencias y el de la psicogénesis. Un buen ejemplo de este caso es la noción de "sólido indeformable". Hasta el siglo XIX, fue considerado por los geómetras como un dato empírico, y aun directamente perceptivo, lo cual los conducía a interpretar su propia ciencia como una matemática aplicada a un dato inmediato de la experiencia. Sólo tardíamente se llegó a la concepción que la atribución a un sólido de su carácter de (idealmente) indeformable se basaba en realidad en toda una estructuración deductiva que involucraba el grupo de los desplazamientos y una métrica con invariancia de las distancias. Por otra parte, una experiencia relativamente reciente, llevada a cabo en el Centro Internacional de Epistemología Genética, ha mostrado resultados sorprendentes en muchos sentidos. Se presenta a los niños un dispositivo triangular formado por varillas rígidas que unen tres pequeños anillos, *A*, *B* y *C*, de tal manera que fijando un lápiz en el agujero *A*, y haciendo desplazar el dispositivo, se puede dibujar la trayectoria. Lo que se pide es, simplemente, reconstituir los trayectos de *B* y *C* sobre el papel en el cual se ha dibujado el trayecto de *A*, y situarlos debajo de *A* (los tres puntos *A*, *B* y *C* forman pues un triángulo cuyo vértice superior es *A*). En tales casos, los sujetos más pequeños no llegan ni aun a conservar, en los puntos de llegada, la configuración que tenían *A*, *B* y *C* al comienzo de su trayectoria. En un segundo período, los sujetos respetan esta correspondencia pero no se preocupan por las posiciones intermedias, como si *A*, *B* y *C* tuvieran desplazamientos relativos entre ellos, durante la ruta, para retomar sus emplazamientos respectivos sólo a la llegada. No es sino en un estadio tardío y apoyándose en argumentos

[3] E.W. Beth y J. Piaget, *Epistemologie, mathématique et psychologie*, París, PUF, 1961, Conclusions générales, p. 325.

métricos y en el postulado de la invariancia de las relaciones entre los tres puntos durante el curso del desplazamiento que los sujetos llegan a resolver el problema.[4] Resulta, pues, evidente que la indeformabilidad del dispositivo ha sido contruida y no dada en la percepción visual, siendo que esta última estaba constantemente presente durante el desplazamiento *muy lento* del objeto en cada experiencia.

Hay ahí, por consiguiente, un ejemplo claro de una cuestión epistemológica (naturaleza empírica o construcción deductiva del concepto de sólido indeformable) que se presenta simultáneamente en el plano de la filosofía del saber geométrico y en el nivel de la psicogénesis. Pues bien: se ha verificado, así, que la respuesta que provee esta última confirma una interpretación de tipo racionalista, mientras que si la interpretación empirista hubiera sido cierta, es en los estadios elementales donde hubiera podido ser verificada.

3. PROBLEMAS DE LA HISTORIA

En lo que respecta a saber si la formación de los conocimientos nos informa sobre su significación epistemológica, en el plano mismo de la historia de las ciencias y no ya de la psicogénesis, se trata aquí de una hipótesis que se admite mas fácil y más corrientemente. En efecto, es un hecho aceptado que la ciencia está en un perpetuo devenir y que no puede considerarse ningún sector, por limitado que sea, como definitivamente establecido sobre sus bases y al abrigo de toda modificación ulterior, aun en el caso de que —como ocurre en las matemáticas— lo que está demostrado se integre en lo que sigue y no se vuelva a cuestionar: tal integración puede, efectivamente, mostrar que una verdad tenida por general, no constituye de hecho más que un caso particular. Aun en dicho caso, y en este sentido restringido, se puede, pues, hablar de error parcial y de rectificación. En estas condiciones de devenir general, va de suyo que un conocimiento no podría ser disociado de su contexto histórico y que, por consiguiente, la historia de una noción provee alguna indicación sobre su significación epistémica. A fin de establecer tales vínculos, es necesario formular el problema en términos de vecciones, es decir, de evolución de las normas en una escala que permita discernir las etapas, y no en términos fácticos de influencia de un autor sobre otro. En particular, desde este punto de vista, carece de interés el problema tan controvertido del papel de los precursores en la obtención, por algún autor, de un nuevo sistema que englobe los aspectos particulares de un tema dado.

Para el punto de vista que adoptamos, lo esencial es caracterizar

[4] J. Piaget y colab., *Recherches sur les correspondances*, París, PUF, 1980, EEG 37, cap. 4

los grandes períodos sucesivos del desarrollo de un concepto, o de una estructura, o de las perspectivas de conjunto sobre una disciplina dada, y todo esto con aceleraciones y regresiones o sin ellas, con acciones de precursores o "rupturas epistemológicas". El problema central a considerar no es el de la continuidad o las discontinuidades (puesto que ambas intervienen en todo desarrollo),[5] sino la existencia de las etapas mismas y, sobre todo, el porqué de su sucesión. En cuanto al papel de los precursores, es un problema psicológico mucho más que epistémico, según que el creador final desee prolongar o completar las intuiciones de aquéllos o, por el contrario, oponerse a ellas para rebasarlas, o que haya oscilación entre esas dos actitudes (que es el caso más frecuente).

No obstante, si bien todos reconocen el alcance epistemológico del estudio de los períodos históricos y de las vecciones que involucran, lo que se ve mucho menos es que hay una cierta falta de coherencia lógica en reconocer, por una parte, el poder de información que contiene la historia por cuanto analiza la construcción del conocimiento, y negar, al mismo tiempo, la misma capacidad en lo que se refiere a la psicogénesis. Tal incoherencia se torna evidente en cuanto se pone de manifiesto el estrecho parentesco entre ambos tipos de investigación. La razón de tal parentesco no consiste solamente en que, como ya se ha dicho, las etapas del saber no se suceden simplemente en un orden lineal (lo cual hubiera permitido considerar que las etapas más elementales no desempeñan ningún papel ulterior), sino que, por el contrario, cada estadio o período comienza por una reorganización de lo que heredó de los precedentes estadios o períodos. Hemos visto, a este respecto, un ejemplo relativo a la noción de sólido indeformable cuyo carácter de construcción deductiva ha quedado evidenciado como la forma efectiva en que se construye esta propiedad de indeformabilidad, tanto en el nivel psicogenético donde la experiencia refuta el carácter empírico a él atribuido como en el nivel científico.

Es preciso agregar que la razón principal por la cual hay parentesco entre los estudios histórico-críticos y psicogenéticos en la epistemología no reside solamente ahí. La razón es más profunda, y consiste en que los dos tipos de análisis conducen tarde o temprano —y cualquiera que sea la magnitud de la diferencia entre los materiales utilizados— a reencontrar en todos los niveles instrumentos y mecanismos similares, no sólo en las interacciones elementales entre sujetos y objetos, sino muy particularmente en la forma en que un ni-

[5] En su interesante "Introducción" al libro *Genèse de la pensée linguistique* [París, A. Colin, 1973], A. Jacob declara que "una enseñanza epistemológica fundamental" ha sido, para él, "reconocer que la lectura del devenir de las teorías lingüísticas no privilegia ni la continuidad ni la discontinuidad" (p. 35).

vel condiciona la formación del siguiente, lo cual nos conduce, como se verá, a formular los mismos problemas generales comunes a todo desarrollo epistémico.

4. EXPERIENCIA Y DEDUCCIÓN

El problema más general de todo desarrollo epistémico —puesto ya de manifiesto en el ejemplo antes analizado, pero que reencontramos en todos los dominios— reside en la determinación del papel que desempeñan, en la elaboración de los conocimientos, la experiencia, por un lado, y las construcciones operativas del sujeto, por el otro.

Consideremos, por ejemplo, los principios de conservación. Hay aquí dos consideraciones que resulta casi trivial volver a poner de manifiesto. En primer lugar, se trata de una exigencia de la deducción misma, puesto que si todo se transforma a la vez, sin invariantes, no hay posibilidad de establecer ninguna inferencia necesaria: esta es la razón por la cual Lavoisier postuló la conservación de los pesos en las reacciones químicas, antes de medirlos, y es igualmente la razón por la cual la noción de energía potencial se impone independientemente de toda medida directa. Pero, en segundo lugar, los principios de conservación han cambiado de contenido como ha sido el caso con la masa y la energía, en la física relativista, o con la "acción" en microfísica: se trata, en este caso, de un papel indispensable que desempeña la experiencia. De aquí proviene la declaración de Poincaré: sabemos siempre que hay algo que se conserva, pero es la experiencia la que indica qué es lo que se conserva. A este respecto, uno de los resultados más instructivos de los estudios psicogenéticos ha sido el mostrar el carácter no inmediato de las conservaciones más simples, como aquellas que están vinculadas con la pura aditividad, así como permitir seguir paso a paso la formación de las operaciones constitutivas de tales invariantes. Sobre el primer punto, se puede citar la no conservación inicial del número[6] cuando se modifica sin más la disposición espacial de un conjunto de 7 a 10 objetos dispuestos en fila, en cuyo caso el niño (hasta los 7 años aproximadamente) se imagina que el número ha aumentado en cuanto se espacian un poco más los elementos, aumentando la longitud de la fila. Sobre el segundo punto, recordemos los resultados que se obtienen cuando se transforma, alargando como salchicha, una bola de plastilina:[7] después de haber negado que la cantidad de materia, el peso y el volu-

[6] J. Piaget y A. Szeminska, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux y Niestlé, 1941.

[7] J. Piaget y B. Inhelder, *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, 2a. ed., Neuchâtel, Delachaux y Niestlé, 1962.

men se conserven, los sujetos llegan a considerar como necesario que la cantidad (o sustancia total) permanezca invariante, mientras que se considera que el peso y el volumen todavía están sufriendo modificaciones. Pero entonces, ¿qué puede ser una cantidad de materia independientemente de su peso y de su volumen? No se trata, ciertamente, de un dato perceptivo, ni aun perceptible, sino de una exigencia lógica. Además, es posible seguir su formación. En el nivel de la no conservación, el sujeto ve ya naturalmente que el cambio de forma se debe al desplazamiento de partes, pero no las interpreta sino como *producciones* nuevas en los puntos de llegada, sin pensar en lo que es sustraído en los puntos de partida: si en lugar de empujar simplemente con los dedos las partes desplazadas, uno quita un trozo de la bola y la vuelve a colocar en la dirección del alargamiento, el sujeto llega más fácilmente a admitir la conservación, lo cual confirma nuestra hipótesis. La operación constitutiva en juego podría pues ser caracterizada por la "conmutabilidad", si entendemos por ella una igualización o compensación entre lo que es sustraído al comienzo y lo agregado al final (independientemente del orden lineal propio de la *conmutatividad*): la generalidad de este proceso inferencial presenta un cierto interés epistemológico, puesto que subordina la invariancia a un sistema de compensaciones operatorias que le proveen una forma deductiva, sin perjuicio de que sea la experiencia la que hace corresponder los contenidos adecuados.

5. INSTRUMENTOS INICIALES DEL CONOCIMIENTO

Lo anterior nos conduce a un segundo gran problema cognoscitivo común a los estudios histórico-críticos y psicogenéticos en epistemología: el que concierne a la naturaleza de las relaciones entre el sujeto y los objetos de su conocimiento, sea que se trate de objetos lógico-matemáticos o físicos. No se trata, todavía, de formular esta cuestión en términos de las grandes interpretaciones empiristas, aprioristas o dialécticas, aunque seremos conducidos a ellas; se trata, más simplemente, de establecer qué tipos de instrumentos utiliza el sujeto para resolver los problemas, de dónde surgen, y cómo son elaborados.

A este respecto, si consideramos un sistema de conocimientos en su estado ya acabado (por ejemplo, una vez axiomatizado), podemos tener la impresión de que los conocimientos así sistematizados se reducen a enunciados (recordemos que el positivismo lógico intentó en sus comienzos hacer del lenguaje y de la percepción la fuente de todos los instrumentos del saber lógico-matemático y físico). Sin embargo, el problema está en examinar por medio de qué instrumentos han sido adquiridos los conocimientos, antes de sus formalizaciones, puesto

que estas últimas se apoyan necesariamente en algo que fue previamente adquirido, a menos de acantonarse en la lógica pura que es, en cierta manera, una formalización de la actividad formalizante.

Notemos sin embargo, que aun en el plano de la axiomática estricta se puede distinguir una dualidad de procesos comunes a todos los dominios del conocimiento y cuyas múltiples manifestaciones pueden seguirse a través de la historia: la dualidad de los instrumentos comparativos (las correspondencias), y de los instrumentos transformadores (o construcciones operatorias). En efecto, una axiomática involucra, por una parte, un conjunto de implicaciones que son, para el caso $p > q$, correspondencias inyectivas entre la verdad de p y la verdad de q. Pero, por otra parte, los teoremas resultan de la combinación de axiomas no redundantes (cuando no se trata de implicaciones a partir de un solo axioma); y en este caso hay "transformaciones" si designamos así la construcción de nuevos contenidos a partir de otros que no los contienen analíticamente. En efecto, una composición de axiomas distintos llega a ser algo más que la enumeración de lo que cada uno de ellos contiene separadamente, y el producto de esta síntesis no es, pues, analítico.

Si consideramos ahora los conocimientos con anterioridad a sus formalizaciones, encontramos en todos los niveles la misma dualidad entre los instrumentos comparativos constituidos por las correspondencias, y las operaciones transformantes, pero con una solidaridad creciente, en particular en la medida en que las transformaciones han podido ser estudiadas en sí mismas. Desde las matemáticas griegas se ha hecho uso de múltiples operaciones, tanto en las transformaciones de una figura con vistas a una demostración geométrica, como en la manipulación de los números, y está claro que cualquier ecuación involucra un juego de correspondencias. Estas últimas fueron elaboradas hasta obtener incluso una teoría completa de las proporciones. Sin embargo, en ausencia de una toma de conciencia de las transformaciones como tales, las correspondencias utilizadas no lograron el nivel que presentaron de manera explícita en el caso del álgebra y del análisis infinitesimal del siglo XVII. A partir de esta época, se asiste a la construcción de una multiplicidad creciente de transformaciones reconocidas en tanto que operaciones efectivas y en solidaridad estrecha con las correspondencias. Pero la tematización final de las transformaciones en "estructuras", y de las correspondencias en "categorías", se realizó en dos momentos diferentes, lo cual constituye una prueba suplementaria y significativa de su dualidad.

Uno de nosotros ha intentado mostrar, en otra parte, que el retardo de la teoría tematizada de las segundas con respecto a las primeras se explicaría por el hécho de que, en la medida en que toda tematización es un sistema de comparaciones a base de correspondencias la reflexión comparativa relativa a las estructuras de transformación es

directa, o sea de primer grado, mientras que la tematización de las categorías supone una reflexión sobre los propios instrumentos reflexivos y es, por consiguiente, de segundo grado.

Si recordamos aquí estos datos es porque hay allí un buen ejemplo de proceso histórico que puede ser esclarecido por la psicogénesis. En primer lugar, los hechos que ésta pone en evidencia prueban de manera decisiva que los instrumentos iniciales del conocimiento no son ni la percepción ni el lenguaje, sino los esquemas de las acciones sensorio-motrices. Tales esquemas dominan desde el comienzo las percepciones y no se verbalizan en conceptos o no se interiorizan en operaciones del pensamiento sino mucho después. Por otra parte, cada esquema de acción es fuente de correspondencias en la medida en que se aplica a situaciones u objetos nuevos, mientras que la coordinación de los esquemas es fuente de transformaciones en tanto que engendra nuevas posibilidades de acción. Hay, pues, desde un comienzo, dualidad pero solidaridad posible entre las correspondencias y las transformaciones. Sin embargo, debe agregarse el hecho esencial de que, puesto que la toma de conciencia está en un comienzo orientada hacia el exterior (resultado de las acciones) y no hacia el interior (coordinación endógena de las acciones), las correspondencias habrán de permanecer por largo tiempo independientes de las transformaciones, antes de que ambas entren en interacción. Encontramos a este respecto una situación que puede ser puesta en paralelo con los comienzos del pensamiento científico, y por las mismas razones, puesto que las leyes de la toma de conciencia aparecen como muy generales y explican además por qué, en todos los niveles, la tematización de una operación es siempre ulterior a una fase de utilización no reflexiva.

6. CONSTRUCCIÓN Y PREFORMACIÓN

Un tercero y gran problema, a propósito del cual la comparación de la historia con la psicogénesis es instructiva, es el de establecer en qué medida un conocimiento nuevo estaba preformado en un conocimiento precedente, o si surge de una construcción efectiva, susceptible esta última de estar, a su vez, predeterminada. Puede parecer curioso que se plantee tal cuestión a propósito de la psicogénesis, puesto que, para el sentido común, el niño no inventa nada y recibe por educación todo lo que aprende. Sin embargo, la mejor prueba de la falsedad de esta tesis es el desarrollo espectacular que tiene lugar en el curso de los dieciocho primeros meses de vida, cuando el niño no habla todavía y sólo está provisto de un pequeño número de conductas: sin embargo, el progreso de su inteligencia y la construcción del espacio, de los objetos permanentes, de la casualidad, etc., atesti-

guan una sorprendente multiplicidad de invenciones y descubrimientos. Resulta de aquí que, ya a partir de este período, se plantea el problema de saber si se trata de novedades sucesivas, de la ejecución de un programa hereditario, o aun de la actualización de posibilidades implicadas desde el comienzo en ciertas intuiciones sintéticas *a priori*.

Sobre el terreno de las ciencias deductivas, el problema es de una gran dificultad puesto que, por muy creadora que aparezca una invención en el momento en que se hace, sus resultados, una vez demostrados, se tornan tan "necesarios" que no se puede evitar ver en ellos el descubrimiento de objetos y de relaciones que existían con anterioridad. De aquí que, aun sin apelar a un sujeto trascendental o trascendente que mantenga en su seno todas las verdades lógico-matemáticas, los matemáticos son casi siempre más o menos platónicos. Pero si así fuera, ¿dónde habría que situar a los "seres" matemáticos y cómo concebirlos? A este respecto, cabe hacer notar que la noción de estos "seres" se ha modificado profundamente en la ciencia contemporánea: cualquier operación o cualquier morfismo es un "ser" con el mismo título que un número o una figura, en cuyo caso no se ve muy bien que podrían ser una operación o una comparación por correspondencia sin un sujeto que opere o que compare. ¿Se podría tratar, entonces, de un mundo de construcciones "posibles"? Pero el conjunto de "todos" los posibles es una noción antinómica, y lo que se da no consiste sino en aperturas continuas sobre nuevas posibilidades. Esto llevaría pues a un constructivismo, a menos que nos preguntemos, frente a cada nueva apertura, si estaba o no predeterminada.

Respecto a este problema no hay, en efecto, sino dos actitudes coherentes: situar a los "seres" matemáticos fuera de la naturaleza y hacer de ésta —como lo hace G. Juvet—[8] un sector muy pequeño del universo de esos "seres"; o considerarlos como pertenecientes a la naturaleza y referidos, por consiguiente, a procesos temporales, pero alcanzando la intemporalidad una vez logrado el nivel de las necesidades instrínsecas, las cuales se tornan permanentes a partir de su constitución. No obstante, al vincular así las formas lógico-matemáticas al espíritu humano, queda todavía la posibilidad de considerarlas, ya sea como predeterminadas en virtud de una programación hereditaria, o bien como resultado de construcciones sucesivas y siempre innovadoras.

Es aquí donde se impone el recurso a la historia y a la psicogénesis; la primera habrá de mostrar sin ambigüedad que la necesidad evoluciona (¿qué queda hoy de lo que parecía "necesario" a los griegos?), mientras que la segunda nos informará sobre la manera en que esa "necesidad" se constituye bajo sus formas más simples. Tratándose,

[8] G. Juvet, *La structure des nouvelles théories physiques*, 1933.

pues, de elegir entre el innatismo y la construcción, y dando por sentado que el espíritu humano es un producto de la organización biológica antes que predomine en él la cultura colectiva, los hechos parecen indicar que el mecanismo orgánico que desempeña el papel fundamental en esta génesis no es la herencia, sino un sistema de autorregulaciones. Considerar las estructuras matemáticas como innatas presenta, en efecto, los más graves problemas biológicos, además de no esclarecer en absoluto el misterio de su naturaleza. Por el contrario, el mecanismo mismo de las regulaciones, con sus composiciones y la dirección retroactiva de los *feedbacks*, parece ya preparar las estructuras operatorias con su reversibilidad. A su vez, los largos y laboriosos tanteos que preceden, en el curso de la psicogénesis, a la construcción de los invariantes, de la transitividad y de la recursividad, serían difícilmente comprensibles si estas propiedades operatorias fundamentales estuvieran programadas hereditariamente y su constitución relativamente tardía (alrededor de los 7 años) no estuviera relacionada sino con las maduraciones nerviosas. Esto resulta tanto menos verosímil en la medida en que, según sean los dispositivos experimentales utilizados, uno puede acelerar estas construcciones o hacerlas más lentas. Sin embargo, una vez que resultan posibles, con cierta rapidez tienen lugar generalizaciones que pueden llegar a veces hasta el infinito. Ya a los cinco años y medio, un sujeto que admitía que si $n = n'$, $n + 1 = n' + 1$, cuando se le preguntó qué pasaría si uno continuaba así por mucho tiempo, respondió: "Cuando uno lo sabe para una vez, lo sabe para siempre."[9]

Este pasaje de la construcción temporal a la necesidad intemporal, que va de suyo en una perspectiva constructivista, pero que presentaría el problema insoluble de la localización del infinito si éste no estuviera vinculado a la iteración ilimitada de un "acto", y debiera consistir en un "ser" predeterminado en un programa hereditario o en una realidad platónica, acerca de la cual nadie ha podido decir jamás mediante qué tipo de mecanismo mental podría ser alcanzada.

Todos los hechos que serán descritos en esta obra, mostrando las analogías entre las construcciones históricas y los procesos psicogenéticos, confirmarán, por otra parte, una verdad bien conocida y que es esclarecedora en cuanto a la elección entre la hipótesis constructivista y la hipótesis de la preformación: antes de la tematización de una estructura, sus operaciones constitutivas intervienen ya, a título instrumental, en la fase anterior de construcción, de tal manera que la construcción se apoya de hecho en la estructura en devenir, de la misma manera que la saturación de ésta supone su integración en una estructura superior más fuerte. Estos hechos, que surgen a la vez

[9] P. Greco, B. Inhelder, B. Matalon y J. Piaget, *La formation des raisonnements récurrentiels*, París, PUF, 1963, EEG 17.

de la construcción temporal y de la teoría intemporal de los límites de la formalización, muestran el parentesco de estas dos clases de consideraciones aparentemente heterogéneas, así como la necesidad de concebir a todos los "seres" lógico-matemáticos como si debieran su existencia sólo a las acciones y no a un dato independiente del sujeto.

7. CAMINOS DIFERENTES Y SUS PUNTOS DE LLEGADA

Si los "seres" matemáticos son engendrados por las construcciones del sujeto, y si las verdades físicas están subordinadas a la vez a estas construcciones y a las posibilidades de acciones de los experimentalistas, parecería que resultara de allí una consecuencia aparentemente inquietante: puesto que el estado de un sistema cognoscitivo en el punto de llegada depende del camino que ha conducido a él, ¿no podría lograrse un mismo estado por dos caminos diferentes? En tal caso, esto equivaldría a decir que un objeto X (objeto real u objeto de pensamiento) no sería ya el mismo X, sino otro (X'), si en lugar de seguir el trayecto t, hubiera seguido un trayecto t' que condujera a X'. Podríamos así concebir que, si nuestros conocimientos físicos hubieran comenzado sobre el terreno biofísico, en lugar de los dominios inorgánicos, hubiéramos quizá llegado a otra física subordinada desde el inicio a la noción de campo o de estructuras disipativas en el sentido de Prigogine;[10] o que otra matemática hubiera sido posible si los griegos hubieran partido de postulados no euclidianos o no arquimédicos. Por el contrario, si se cuestionan estas suposiciones, y se atribuye al espíritu humano una sola física y una sola matemática posible, esto nos conduciría a la hipótesis de la predeterminación de los conocimientos. Parecería, pues, que estamos en presencia de una alternativa ineluctable: o una diversidad heterogénea de caminos y de resultados posibles, o la preformación del saber.

Hay dos razones, sin embargo, para negarse a aceptar tal dilema. En primer lugar, los resultados diferentes obtenidos por caminos distintos serán tarde o temprano coordinados por medio de transformaciones más o menos complejas entre X y X'. En segundo lugar, las coordinaciones transformantes no son posibles sino *a posteriori*, y no pueden, por consiguiente, estar preformadas. La confianza en la intervención de tales coordinaciones se funda en el hecho de que la naturaleza (o el "mundo") existe, y que por muy poco estática que sea —puesto que involucra una evolución continua de los seres y de la mente— dicha naturaleza no es contradictoria. Ahora bien, en el seno de esta naturaleza se presentan dos puntos de unión entre la men-

[10] P. Glansdorff e I. Prigogine, *Structure, stabilité et fluctuations*, París, Masson, 1971.

te y la realidad física, lo cual asegura su interacción y aun bajo una forma cuasi-circular: una juntura terminal que permite al sujeto hacer experiencias sobre el mundo exterior, y una juntura inicial que liga su mente a su organismo y este último a las estructuras del mundo físico con las cuales está en interacción continua. De aquí resulta que aun cuando las construcciones de la mente rebasen muy ampliamente (y aun "infinitamente") las fronteras de los fenómenos, puede de todas maneras haber acuerdo entre aquéllas y éstos, y que cuando caminos diferentes de investigación hayan llegado a resultados aparentemente incompatibles, se puede esperar siempre que sean coordinables mediante la invención de nuevos instrumentos cognoscitivos.[11] Un buen ejemplo es el de la onda y la partícula en microfísica: concebidas en un comienzo como mutuamente exclusivas, luego como simplemente asociadas, sus relaciones permanecen hoy plenas de misterio, pero hay certeza entre los físicos de poder llegar a explicarlas tarde o temprano. Sin embargo, tales coordinaciones no podrían ser concebidas como predeterminadas, y esto por dos razones, de las cuales una proviene de la mente y la otra de la realidad exterior. La primera resulta del hecho de que los términos a coordinar son nuevos y variables, de tal manera que sus relaciones no pueden ser establecidas sino por construcciones *a posteriori*. La segunda es que, por muy dinámica que sea la naturaleza, y por mucho que sea fuente de transformaciones, su forma de proceder es sólo a través de aperturas sucesivas a nuevas variaciones en función de modificaciones situadas también en el tiempo: decir que todas las combinaciones concebibles están preformadas en un conjunto inicial de "todos" los posibles es, pues, una afirmación desprovista de sentido, tanto más cuanto que el "todos" no constituye sino una reunión concebida ella misma como "posible", pero en un sentido que se refiere, a la vez, a esta clase y a sus subclases.

8. LA NOCIÓN DE "HECHOS"

La cuestión de las relaciones entre los hechos y las interpretaciones se presentará sin cesar en las páginas que seguirán, dedicadas en gran parte a la epistemología de la física y las matemáticas. Por consiguiente, puede ser útil referirnos con cierta precisión, en esta introducción, a los problemas que presenta la noción misma de "hecho".

Como ya señalamos en la sección 1, un observable, por elemental

[11] Esta dependencia de los resultados con respecto al camino recorrido está, como es sabido, limitada a los sistemas abiertos. Por el contrario, es una ley fundamental de los sistemas cerrados que la identidad de un mismo punto puede ser lograda por caminos diferentes.

que sea, supone ya mucho más que un simple registro perceptivo, puesto que la percepción como tal está ella misma subordinada a los esquemas de acción: estos últimos, en tanto que involucran una logización por el juego mismo de sus puestas en relación, imbricaciones, etc., constituyen entonces el marco de todo observable. Por consiguiente, este último es, desde el inicio, el producto de la unión entre un contenido dado por el objeto, y una forma exigida por el sujeto a título de instrumento necesario de toda verificación. Si esto es cierto acerca de los "registros" perceptivos, con mayor razón tales construcciones del sujeto se tornan más y más importantes cuando se pasa de allí a los diferentes estadios de la interpretación, de los cuales existen varios hasta llegar a los niveles terminales caracterizados por la búsqueda de la explicación causal.

Podemos pues, considerar el "hecho" —ya sea que se trate de una propiedad, de una acción o de un evento cualquiera— como un observable, pero a partir del momento en que es "interpretado", es decir, revestido de una significación relativa a un contexto más amplio, mientras que un simple observable posee una significación (puesto que toda asimilación confiere ya una significación) que puede permanecer enteramente local en el espacio y aun en el tiempo. Por consiguiente, un hecho es, siempre, el producto de la composición entre una parte provista por los objetos y otra construida por el sujeto. La intervención de este último es tan importante, que puede llegar hasta a una deformación o, aún más, a una represión o rechazo del observable, lo cual desnaturaliza el hecho en función de la interpretación. Veamos un ejemplo. Para disparar una piedra amarrada a un hilo, que se hace girar en círculos a fin de hacerla entrar en una caja situada delante de ellos, los niños aprenden rápidamente a lanzar la piedra tangencialmente en las posiciones precisas.[12] Si representamos al círculo por un cuadrante horario horizontal, y referimos las posiciones de la piedra a las horas marcadas en el cuadrante, el lanzamiento debe realizarse cerca de las 3 horas o de las 9 horas. Pero cuando se les interroga sobre lo que han hecho, creen haber liberado el proyectil enfrente mismo de la caja (es decir en posición correspondiente a las 12 horas): hay allí una deformación del observable en función de una falsa interpretación, según la cual un proyectil no puede llegar a su blanco a menos que sea lanzado según la recta que une a quien lanza el proyectil con el blanco.

Otros numerosos ejemplos podrían ser citados en el plano de la psicogénesis, pero también en la historia de las ciencias se encuentra una actitud análoga cuando un investigador, antes de aceptar un hecho que desmiente sus teorías, trata por todos los medios de atenuar su alcance: el mismo Planck, habiendo descubierto su primer

[12] J. Piaget y colab., *La prise de conscience*, París, PUF, 1974.

ejemplo de quanta, buscó durante algunos años dónde podría encontrarse lo que él creía era un error, antes de decidirse a reconocer el hecho. Si la interpretación del sujeto resulta clara en los casos en que es errónea, no es menos necesaria para la constitución del hecho cuando es correcta, cualquiera que sea el nivel: la caída de una manzana es un hecho para un campesino que ve en ello la reacción normal de una fruta madura, tanto como para Newton, a quien se atribuye haber reconocido ahí un ejemplo de la gravitación.

Pero si la interpretación propia de la constitución del hecho muestra ya que, en todos los niveles, un hecho es siempre solidario de un sistema de conceptos o de esquemas sensorio-motrices, conviene sin embargo precisar que este tipo de interpretación, aunque superior a la asimilación simple que sirve de registro del observable, no es sino la menos compleja de una serie jerárquica que conduce al objeto, a la legalidad y, finalmente, a la interpretación causal, es decir, explicativa. Los observables pueden contentarse con un solo esquema para ser registrados, sin perjuicio de su diferenciación por acomodación en caso necesario. Por el contrario, nosotros admitiremos que hay un "hecho" a partir del momento en que se torna necesario un sistema de esquemas: decir que esta manzana ha caído, que esta montaña está cubierta de foresta o que la puesta de sol ocurrió a tal hora, en este lugar, y en tal fecha, son hechos, todos los cuales suponen coordinaciones de conceptos. Pero aun cuando haya allí un progreso con respecto a los observables constitutivos, estamos todavía muy lejos de una teoría deductiva, causal o meramente legal.

Notemos, antes de llegar ahí que el "objeto" se constituye en interacción con los hechos, es decir, en el mismo nivel, pero según una dualidad de significaciones. La formación del objeto supone una coordinación de hechos. Esto es evidente desde los comienzos mismos de la permanencia del objeto, en el período sensorio-motriz, con la intervención de posiciones, sucesiones, etc., que permiten finalmente a un bebé buscar un objeto oculto por una pantalla. Pero, recíprocamente, un hecho, en tanto solidario de un sistema de esquemas, no adquiere la significación ampliada que lo distingue de un observable sino en la medida en que expresa propiedades o acciones de objeto. Se puede, pues, considerar al objeto como una síntesis de hechos referidos a un mismo sustrato, y los hechos como la expresión de relaciones o de acciones entre objetos, o interiores a uno de ellos (pero, en este caso, con correspondencias posibles con respecto a los otros).

9. LEGALIDAD Y CAUSALIDAD

Dicho lo anterior, resulta claro que el progreso subsiguiente en las interpretaciones que involucran la constitución de hechos se deba a

una generalización que conduce al establecimiento de "hechos generales". Un hecho general no es otra cosa que una ley. Esto es cierto ya desde los niveles elementales, aunque su logización permanece cualitativa; por ejemplo, cuando un bebé descubre que todo objeto suspendido puede ser balanceado. Pero, también en los niveles altamente matematizados, una ley física permanece en el estado de hecho general en tanto su generalidad sea de naturaleza inductiva y no resulte todavía de conexiones necesarias: en efecto, la matematización en juego no consiste, en esta situación, sino en un conjunto de formas "aplicadas" por el físico a un contenido provisto por la experiencia; y si el empleo de tal forma, en grados diversos, está dictado por la naturaleza de su contenido, este último no está revestido aún de caracteres necesarios en tanto no esté inserto en un sistema de relaciones causales. Estas últimas, por el contrario, rebasan las fronteras de los hechos y de las leyes, puesto que son a la vez consecuencia necesaria de otros hechos y fuente de nuevas transformaciones. La interpretación en juego en la construcción de un modelo causal es pues de un nivel jerárquico superior al de la interpretación constitutiva de hechos y de leyes, aun cuando puedan comenzar, cronológicamente, en simultaneidad con ésta: lo que la interpretación causal aporta de nuevo es entonces, precisamente, la necesidad "atribuida" a las secuencias en su mismo contenido, y esta necesidad intrínseca es muy distinta de la obligación de aplicar tal forma lógico-matemática a tal contenido, el cual permanece, en este caso, simplemente comprobado y no explicado. Recordemos, sobre todo, que la necesidad de las secuencias no es lo mismo que su generalidad, y que cuando se habla de "leyes causales" para designar secuencias simplemente regulares (por lo tanto ya generales), hay un abuso de lenguaje: la causalidad no expresa solamente el "hecho" de que B sigue "siempre" a A, sino que pretende desentrañar el modo de transformación que conduce de A a B; por ejemplo, la transferencia de mv o de $\frac{1}{2}mv^2$, de una bola a la siguiente, en el caso de una propulsión.

Importa, por lo tanto, precisar las diferencias entre la ley y la causa y, para hacerlo, analizar la naturaleza de los intermediarios entre las inferencias legales y la deducción causal. En efecto, establecer hechos generales o leyes puede dar lugar a dos clases distintas de inferencias. Está, ante todo, la inferencia inductiva que permite al físico poner en correspondencia sus medidas y poner de manifiesto las relaciones generales bajo la forma de ecuaciones funcionales. Estas relaciones constituyen por lo tanto formas "aplicadas" a los contenidos y cuya elección está obligada por ellos, pero a nivel de verificación y sin carácter de necesidad. Por otra parte, una vez que las leyes están así establecidas, es posible, gracias a nuevas inferencias, coordinarlas en un sistema deductivo tal que las leyes particulares estén

insertas en otras más generales. En este caso, las formas están vinculadas por conexiones necesarias, independientemente de que permanezcan siempre en el estado de formas aplicadas y simplemente determinadas por sus contenidos. En cuanto a estos últimos, sus diversos grados de generalidad comprobada (pero *solamente* comprobada) permite la constitución de imbricaciones inclusivas, pero sin dar las razones intrínsecas y, por lo tanto, la explicación.

La causalidad comienza, por el contrario, cuando las transformaciones descritas hasta ahí tan sólo como "hechos" pueden ser coordinadas en estructuras totales cuyas leyes de composición subordinan las imbricaciones a transformaciones operatorias, necesariamente solidarias en tanto sistemas cerrados cada uno de los cuales comporta su propia lógica (tal es el caso de la estructura de grupo). Hay, en este caso, pasaje de relaciones inclusivas a relaciones constructivas o, más precisamente, de una clasificación a un álgebra; y son las transformaciones propias de los modelos algebraicos así constituidos las que se tornan, por este mismo hecho, explicativas. Pero, como se puede ver, las relaciones entre formas y contenidos son modificadas; es el contenido mismo el que se convierte en base y fuente de conexiones necesarias, puesto que los objetos, relaciones y transformaciones de la realidad (es decir, de un contenido dado) no son ya simplemente interpretados por una traducción posible en las formas lógico-matemáticas del sujeto, sino que devienen los operadores de la estructura algebraica aceptada por esa realidad. Tal es la forma superior de la serie de interpretaciones que comienza con el "hecho", y podemos por consiguiente caracterizarla diciendo que en ese caso las operaciones en juego no son ya simplemente "aplicadas" a los objetos, sino que se les "atribuye" el ser interiores a la estructura algebraica del sistema real. Este sistema no es conocido por el sujeto más que a través de los modelos que él ha construido y que engloban las leyes establecidas, de tal suerte que las operaciones ahora atribuidas pueden ser en parte las mismas que aquellas que no consistían sino en aplicaciones: pero lo que es nuevo, y lo que define lo que es propio de la causalidad, es su integración en estructuras caracterizadas por la necesidad interna de sus composiciones.

Precisemos, además, que la explicación causal, es, a su vez, susceptible de grados y de aproximaciones sucesivas, tanto como la misma legalidad: una vez que se pone de manifiesto la transformación que explica el pasaje de A a B, se presenta la cuestión de saber por qué es así, y a un nuevo progreso del "cómo", sucederá un nuevo "por qué", etc. Resultan así estructuraciones intermediarias que algunos autores encuentran ya explicativas, mientras que otros sólo ven allí una legalidad más profunda. Un buen ejemplo de esta situación lo encontramos en los primeros modelos meteorológicos construidos por V. Neumann y J. Charney con ayuda de la primera computadora

electrónica. Ciertos especialistas no vieron en esos modelos más que un sistema de ecuaciones que describía el movimiento de la atmósfera y que no rebasaba el nivel de la legalidad, aun cuando permitiera cierto tipo de pronósticos. Para otros, por el contrario, las transformaciones en juego tenían carácter explicativo por el hecho de que involucraban una teoría hidrodinámica y termodinámica de la atmósfera. En nuestro lenguaje, esto equivale a decir que los primeros se centraron en la forma y no percibieron sino operaciones aplicadas, mientras que los segundos consideraron que el contenido mismo estaba involucrado y que por consiguiente se trataba de operaciones "atribuidas".

10. DESCUBRIMIENTO Y JUSTIFICACIÓN

El punto de vista que será desarrollado a lo largo de esta obra responde a una de las afirmaciones fundamentales de la epistemología genética: la naturaleza constructivista de nociones tales como validez, necesidad y justificación del conocimiento.

Tal afirmación se opone a lo que sostienen los autores que pertenecen a las escuelas positivistas y neopositivistas que han influido decisivamente en la filosofía de las ciencias, particularmente en el mundo anglosajón, durante la primera mitad del siglo XX. Quizá la expresión más característica de la posición neopositivista con respecto a esta cuestión se encuentra en la obra de Reichenbach, *Experience and prediction.*[13]

Reichenbach introduce una distinción radical entre lo que él llama "el contexto del descubrimiento" (*context of discovery*) y "el contexto de justificación" (*context of justification*). El primero se refiere al proceso de descubrimiento científico, a la manera en la cual un hombre de ciencia llega a concebir un nuevo concepto, construye una nueva teoría, o encuentra una nueva explicación para un fenómeno que hasta entonces no había sido explicado. El segundo, por el contrario, sólo se refiere a la forma de validar un concepto o una teoría científica o, dicho de otra manera, a su justificación racional, su legitimación en el interior de un conjunto de conocimientos aceptados.

El estudio del contexto del descubrimiento pertenece a la psicología y a la historia. Es, por consiguiente, según Reichenbach, ajeno a la filosofía de la ciencia, la cual debe tener en cuenta solamente el contexto de justificación.

A partir de esta distinción surge una consecuencia inmediata: para validar el conocimiento es necesario despojarlo de todas las connotaciones que haya podido adquirir en el proceso de descubrimiento. La

[13] H. Reichenbach, *Experience and prediction.*

justificación exige, por lo tanto, una verdadera reconstrucción del conocimiento, a fin de poner en evidencia su coherencia (desde el punto de vista de su lógica interna) y su confirmabilidad (desde el punto de vista de su adecuación a la realidad). El objetivo de la filosofía de la ciencia se convierte, así, en la reconstrucción racional del pensamiento científico.

Una de las objeciones inmediatas a tal posición consiste en mostrar que la teoría neopositivista no provee, en ninguna de sus formulaciones, una fundamentación para sus propias afirmaciones, un método que garantice su validez. Sin embargo, las principales dificultades para aceptar la posición neopositivista no se encuentran ahí.

Toda teoría que introduce una dicotomía entre procesos constructivos y métodos de validación, en la elaboración de teorías científicas, hace referencia explícita o implícitamente al sujeto cognoscente, atribuyéndole un papel particular a lo largo del proceso. Esto es cierto, por otra parte, con respecto a toda la epistemología. Cuál es el papel que corresponde al sujeto en el proceso de adquisición de conocimientos es lo que no suele estar claro.

Si se hace referencia, en dicho proceso, a un sujeto "natural", es necesario verificar si lo que de él se dice corresponde a la realidad. Aquí es suficiente con recordar la crítica dirigida a menudo contra las teorías empiristas del conocimiento; el papel atribuido por ellas al sujeto, en la adquisición del conocimiento, no ha sido jamás verificado empíricamente.

Si, por el contrario, se hace referencia a un sujeto "ideal", cuyas normas son concebidas y formuladas según otro tipo de especulación filosófica, se torna necesario mostrar cuáles son los criterios de validez utilizados para aceptar tales conclusiones epistemológicas, cuáles son las razones para remplazar un sujeto "natural" por un sujeto "ideal", y cuáles son las relaciones entre ambos. Es interesante notar a este respecto que el análisis comparativo de las teorías epistemológicas permite poner de manifiesto una gran variedad de características atribuidas al sujeto del conocimiento; características obviamente contradictorias entre sí.

La idea de los dos "contextos" propuesta por Reichenbach ha encontrado serios oponentes entre los filósofos de la ciencia. Kuhn es quizá uno de los más representativos: él ve en la historia de las teorías científicas un elemento esencial para rendir cuentas de su aceptabilidad y de su justificación. Nos referimos en detalle a la posición de Kuhn en el capítulo IX, "Ciencia, psicogénesis e ideología". Por el momento es suficiente con señalar que su posición se presta, en cierto sentido, a las mismas críticas. En efecto, Kuhn busca los fundamentos normativos utilizados por los "constructores" de las diferentes ramas del conocimiento en su desarrollo cognoscitivo espontáneo. Pero entonces es necesario decidir si se considera que los especialistas de las diversas disciplinas científicas son o no representantes auténticos

del sujeto "natural". En caso afirmativo no harán sino prolongar los mecanismos y las normas racionales de todo sujeto natural. En caso negativo, los hombres de ciencia constituirían una clase aparte, diferente de los sujetos "naturales"; sus actividades cognoscitivas obedecerían a normas epistemológicas que no son las del pensamiento no científico.

Aquellos que admiten que un hombre de ciencia utiliza y aplica normas precisas en todas y cada una de las etapas de su trabajo (descubrimiento, invención, verificación, explicación), para todo lo que efectivamente realiza, difícilmente pueden proveer indicaciones precisas sobre lo que son dichas normas. Los hombres de ciencia son sólo parcialmente conscientes de lo que hacen. Dejando de lado aquellos que han estudiado específicamente los fundamentos teóricos de su disciplina, se puede comprobar que los hombres de ciencia más originales son susceptibles de sostener ideas incompletas, y aun falsas en cuanto a las estructuras del pensamiento. Un buen número de físicos, positivistas ortodoxos, han efectuado sus descubrimientos por procedimientos que se corresponden con las afirmaciones positivistas más fundamentales.

La historia presenta clara evidencia de la utilización de estructuras por parte de los científicos, sin que éstos hayan tomado conciencia de las mismas. Para citar un solo ejemplo, ya clásico: Aristóteles utilizó la lógica de las relaciones de manera muy clara y precisa en su propio discurso, ignorándola por completo en la construcción de su lógica. Hay, por consiguiente, un largo camino por recorrer entre la utilización espontánea o el empleo inconsciente de estructuras, y la toma de conciencia de tal utilización. De aquí que una primera dificultad —a veces muy difícil de superar— sea poder determinar las normas efectivamente utilizadas por el sujeto, y a esto no escapa el hombre de ciencia: es necesario, pues, aprehender las operaciones efectivas que están en obra en sus acciones, aun cuando su toma de conciencia no se refiera sino a fragmentos, a veces deformados, mal registrados e incompletos.

La consideración de la evolución de las teorías científicas en un marco como el de Kuhn debe enfrentar también otra dificultad: todo conocimiento, por nuevo que parezca, no es jamás un "hecho primigenio", totalmente independiente de los que lo han precedido. Se llega a un nuevo conocimiento por reorganizaciones, ajustes, correcciones, adjunciones. Aun cuando se trate de hechos experimentales desconocidos hasta el momento de su descubrimiento, no se integran sin más al acervo cognoscitivo del sujeto: hace falta un esfuerzo de asimilación y de acomodación que condiciona la coherencia interna del propio sujeto, sin lo cual éste no se entendería ya a sí mismo.

Las estructuras cognoscitivas, en tanto constituyen una organización de los conocimientos, son comparables a organismos cuyo estado

actual es función no sólo del medio actual, sino también de toda la historia ontogenética y filogenética. Esto no excluye el carácter normativo que tales estructuras pueden tener para el sujeto. Pero es necesario precisar que, en el caso de procesos cognoscitivos, se agrega otra determinación: la transmisión cultural. Dicho de otra manera, el conocimento no es nunca un estado, sino un proceso influido por las etapas precedentes de desarrollo. De aquí surge la necesidad del análisis histórico-crítico.

En esta obra vamos a sostener —y a intentar demostrar— que los únicos factores realmente omnipresentes en los desarrollos cognoscitivos —tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis— son de naturaleza funcional y no estructural. Dichos factores están vinculados con la asimilación de lo que es nuevo a las estructuras precedentes, y con la acomodación de estas últimas a las nuevas adquisiciones realizadas.

Es necesario destacar, sin embargo, que los contenidos y los "órganos" de estructuración de estas funciones universales cambian continuamente, de tal manera que ellas devienen parte integrante de los constituyentes del desarrollo histórico. En otros términos, la transformación continua de los conocimientos procede por reorganización y reequilibración, paso a paso, sin preformación; la necesidad intrínseca de las estructuras constituye el producto de conquistas sucesivas.

Si nuestra posición es correcta, debemos convenir en que el conocimiento científico no es una categoría nueva, fundamentalmente diferente y heterogénea con respecto a las normas del pensamiento precientífico y a los mecanismos inherentes a las conductas instrumentales propias de la inteligencia práctica. Las normas científicas se sitúan en la prolongación de las normas de pensamiento y de práctica anteriores, pero incorporando dos exigencias nuevas: la coherencia interna (del sistema total) y la verificación experimental (para las ciencias no deductivas).

11. OBJETIVO DE ESTA OBRA

En un caso particular, que corresponde a la evolución de la física entre Aristóteles y las últimas etapas de la física prenewtoniana, nos ha sido posible establecer una correspondencia realmente estrecha entre las fases históricas (los dos motores aristotélicos, el recurso a un solo motor externo, el descubrimiento del *impetus* y el de la aceleración) y las etapas de la psicogénesis. En particular, hemos observado una sorprendente analogía entre los conceptos de Buridan y de Oresmes, y la construcción y generalización que hace un niño, hacia los 7 u 8 años, de la idea de *élan*. En un caso como ése, el paralelismo entre la evolución de las nociones en el curso de la historia y en el seno

del desarrollo psicogenético se refiere al contenido mismo de las nociones sucesivas, lo que es comprensible puesto que se trata de conceptos que son en cierta manera precientíficos. Pero sería absurdo buscar una generalización de dicho paralelismo de contenidos en el caso de las teorías propiamente científicas, como aquellas que forman parte de la evolución de la mecánica, desde Newton a la relatividad y a la mecánica cuántica. La parte esencial de nuestra investigación no estará referida, por consiguiente, al contenido de las nociones sino a los instrumentos y mecanismos comunes en su construcción. ¿Qué debemos entender, entonces, por "instrumentos y mecanismos comunes"? Es lo que nos resta por precisar en esta introducción.

El más general de todos ellos corresponde a la naturaleza de los razonamientos que, en todos los niveles de la psicogénesis así como de la historia de las ciencias, involucra, por una parte, "abstracciones reflexivas" (a las cuales ya nos hemos referido) tanto como "abstracciones empíricas" (con alternancias de ambas formas, en el caso de la física, y predominio exclusivo de la primera de ellas, en el terreno matemático), y, por la otra, generalizaciones tanto extensionales como constructivas.

Un segundo carácter general es que en ningún caso de elaboración cognoscitiva el sujeto recurre a experiencias puras, puesto que, como ya hemos visto, todo "observable" es siempre interpretado, y todo "hecho" implica necesariamente una interacción entre el sujeto y los objetos considerados. Resulta de aquí que, en todos los dominios, el conocimiento, ya sea correcto o erróneo, involucra un aspecto inferencial. En todos los sectores del conocimiento, aun en la zoología y la botánica simplemente "sistemáticas" (es decir, descriptivas) el aporte del sujeto es indiscutible puesto que la forma misma de las clasificaciones corresponde a la estructura de un "agrupamiento" o semilátice. La estructura de agrupamientos es construida por el niño a partir de los 7 u 8 años, pero naturalmente con un número restringido de elementos, mientras que en biología sistemática el número es ilimitado.

Estos instrumentos y mecanismos comunes llevan a una tercera variedad que actúa desde en las construcciones sensorio-motrices hasta en las formas superiores del pensamiento científico: es el doble proceso de diferenciaciones e integraciones que atestigua todo progreso cognoscitivo, y cuyos dos aspectos se tornan, tarde o temprano, solidarios.

En cuarto lugar, está claro que en todas las escalas del saber, desde el "saber hacer" sensorio-motriz hasta las teorías más elevadas, hay siempre una búsqueda de las "razones" tanto de los éxitos como de los fracasos, de tal manera que las razones vienen en todos los casos a vincular los resultados obtenidos con las "estructuras" o con las coordinaciones de esquemas. Por ejemplo, de los 9 a los 12 meses, los sujetos descubren la permanencia de los objetos que les han sido ocultados, y vinculan

la razón de esa permanencia a lo que Poincaré llamaba ya un "grupo" (en realidad, un grupo práctico) de desplazamientos.[14]

En quinto lugar, es interesante comprobar, como lo haremos sin cesar, que en el curso de la historia del pensamiento científico los progresos logrados de una etapa a la siguiente no se suceden, salvo raras excepciones, de cualquier manera, sino que pueden ser seriados como en el curso de la psicogénesis, bajo la forma de "estadios" secuenciales, de los cuales trataremos de caracterizar los más importantes en cada dominio. Por ejemplo, en el caso de ese período fundamental del álgebra que culmina con los "grupos" de Galois y sigue con aplicaciones posteriores de dicho concepto, se asiste a una sucesión de construcciones que no se encadenan al azar, sino que cada una se ha hecho posible por las precedentes, y prepara las siguientes. Situaciones análogas encontramos en el desarrollo de la geometría. La búsqueda de tales leyes de sucesión constituirá uno de los aspectos esenciales de nuestro ensayo, pero es aquí donde conviene precisar cuidadosamente los objetivos que perseguimos al comparar tales encadenamientos con los que se observan en el terreno de la psicogénesis: este objetivo no es, en modo alguno, poner en correspondencia las sucesiones de naturaleza histórica con aquellas que revelan los análisis psicogenéticos, destacando los contenidos. Se trata, por el contrario, de un objetivo enteramente diferente: mostrar que los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente son análogos a los del pasaje de un estadio psicogenético al estadio siguiente.

Ahora bien, estos "mecanismos de pasaje" que constituyen, pues, el objetivo central de nuestra obra presentan por lo menos dos caracteres comunes a la historia de la ciencia y a la psicogénesis: uno acerca del cual hemos insistido muchas veces, pero otro que nos parece nuevo. El primero de estos mecanismos está constituido por un proceso general que caracteriza todo progreso cognoscitivo: consiste en que, cada vez que hay un rebasamiento, lo que fue rebasado está de alguna manera integrado en el rebasante (lo cual está lejos de ser el caso fuera de los rebasamientos cognoscitivos, ni aun en biología). El segundo mecanismo de pasaje, que hasta ahora no había sido estudiado pero que constituye el tema central de esta obra, es un proceso que nos parece también de naturaleza completamente general: es el proceso que conduce de lo intra-objetal (o análisis de los objetos), a lo inter-objetal (o estudio de las relaciones y transformaciones) y de allí a lo trans-objetal (o construcción de las estructuras). El hecho de que esta tríada dialéctica se reencuentre en todos los dominios y en todos los niveles, nos parece la principal adquisición a la cual alcanzamos con nuestro esfuerzo comparativo. En efecto, la generalidad

[14] J. Piaget, *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1937.

de esta tríada *intra*, *inter* y *trans*, y el hecho de que se la encuentre tanto en el seno de las sucesiones globales como en las subetapas que las integran, constituye sin duda el mejor argumento en favor de una epistemología constructivista. El empirismo podría, en rigor, dar cuenta del pasaje del *intra* al *inter*, puesto que se trataría en ese caso de sustituir los predicados iniciales por relaciones (y las relaciones podrían ser sugeridas por simples verificaciones). Pero el pasaje del *inter* al *trans* implica rebasamientos con todo lo que ello involucra en términos de construcciones necesarias. En cuanto al apriorismo, si bien podría llegar a justificar el *trans*, considerado en tal caso como preformado, no podría explicar por qué los rebasamientos en el seno de las transformaciones deben de estar preparados por etapas de tipo *intra* e *inter*. La sucesión obligada de los *intra* a los *inter*, y solamente de allí a los *trans*, muestra así, con toda evidencia, el carácter constructivista y dialéctico de las actividades cognoscitivas, y constituye, a nuestro juicio, una justificación de un alcance no despreciable.

CAPÍTULO I
DE ARISTÓTELES A LA MECÁNICA DEL IMPETUS

En este primer capítulo, cuyo tema es de carácter histórico, el objetivo fundamental de nuestra exposición difiere en varios respectos de los que orientarán nuestro trabajo en los capítulos siguientes. En estos últimos, el contenido mismo de los temas cuya evolución histórica vamos a desarrollar corresponde, salvo algunas pocas excepciones, a niveles de abstracción que están muy por encima de los niveles que estudia la psicología genética. Nuestra exploración se orientará, como hemos explicado ya en la introducción, hacia la detección de los mecanismos que entran en juego cada vez que se produce el pasaje de una etapa a otra en la evolución de los conceptos y de las teorías, dentro de cada una de las ramas de la ciencia que hemos elegido para ilustrar y "verificar" las hipótesis de base que nos condujeron a concebir esta obra. En cierta manera, partiremos, en cada caso, de una ciencia (o, más específicamente, de una rama de la ciencia) ya constituida, aunque sea aún rudimentaria, y nuestro propósito, en lo que concierne al análisis histórico, será analizar sus éxitos, sus fracasos, sus crisis y sus superaciones, destacando los mecanismos que conducen a estas últimas. En el presente capítulo, por el contrario, nos encontraremos con un tema cuyo desarrollo se mantiene, hasta el comienzo de la Edad Moderna, suficientemente próximo al pensamiento precientífico del niño o del adolescente, cuando éstos intentan explicar los mismos fenómenos, como para que podamos poner en evidencia un notable paralelismo en el contenido mismo de las nociones que entran en juego en uno y otro caso.

La razón por la cual esta "puesta en correspondencia" de contenidos es posible con respecto al tema de este capítulo y no lo será en el próximo, por ejemplo, constituye de por sí un problema epistemológico cuya explicación dejaremos para las "conclusiones", pero cuya naturaleza debemos señalar ahora. Tanto el presente capítulo como el próximo, referente a la evolución de la geometría, partirán de los griegos, no porque sean ellos los únicos pensadores dignos de ser mencionados en la Antigüedad, sino porque es posible establecer una continuidad histórica, suficientemente bien documentada, entre ellos y la ciencia moderna y contemporánea. Sin embargo, el proceso histórico en uno y otro caso es diferente. En el caso de la geometría, la ciencia griega presenta ya (con Euclides, Arquímides, Apolonio) una riqueza de contenido y una estructura teórica que habrá de

mantenerse inalterable con el correr del tiempo y que se modificará sustancialmente, en el siglo XIX, pero sólo para ser subsumida en una concepción total, más amplia. De la "ciencia del movimiento" de Aristóteles no queda, por el contrario, nada rescatable. El penoso y largo camino que conduce de él a Galileo, a Huygens y a Newton muestra, como veremos de inmediato, algunos atisbos que podrían señalarse como "precursores" de las ideas que se desarrollarán en el siglo XVII, pero el surgimiento de la mecánica en este siglo significa la liquidación lisa y llana de las ideas sobre la "dinámica" que se elaboran en los siglos precedentes. La renovación no es sólo conceptual sino metodológica. La mecánica, como ciencia (en el sentido que hoy entendemos por "ciencia"), *comienza* en el siglo XVII. Este desarrollo, tan tardío con respecto a la matemática, nos permite seguir paso a paso un largo período "precientífico" a través de una abundante literatura en la cual se puede detectar la génesis y el desarrollo de las nociones a medida que eran concebidas. Nada similar podemos realizar en el campo de la matemática, excepto en temas aislados, por cuanto tendríamos que remontarnos a una época con respecto a la cual el material escrito que se ha conservado es insuficiente para tal fin.

Este será, por consiguiente, el único capítulo en el cual buscaremos correspondencias de *contenidos* entre la psicogénesis de ciertas nociones y el desarrollo de las mismas en el proceso histórico. Pero también encontraremos aquí el comienzo de una correspondencia más profunda relativa a los mecanismos en juego en ambos procesos (el psicogenético y el histórico). Este paralelismo, así como lo primitivo de dichos mecanismos, que durante siglos imponen severas limitaciones al desarrollo conceptual, constituyen hechos sobre los cuales la historia de la ciencia ha pasado sin advertir su significación epistemológica. Por nuestra parte podemos asegurar que fuimos conducidos a ellos a partir de una problemática que fue primero planteada en el campo de la psicología genética y que nos permitió una relectura de la historia desde una perspectiva diferente a la que prevalece entre los historiadores de la ciencia.

Como ocurrirá con los demás capítulos, pero quizá mucho más que en ellos, la elección del material histórico que aquí consideraremos presenta cierta arbitrariedad y no pretende en modo alguno constituir un estudio completo sobre los temas tratados. La extensión dada a la exposición de las ideas de ciertos autores, la brevedad de las referencias a otros, y las muchas omisiones de nombres "importantes" serían inadmisibles en una "historia" cuyo objetivo fuera el relato de los hechos con el máximo rigor en cuanto a la distribución de méritos y la asignación de prioridades. Pero nuestro objetivo, como ya hemos señalado, es muy diferente. De aquí que los criterios que han presidido nuestra "selección" hayan sido, fundamentalmente, la claridad de la exposición, la representatividad con respecto a una época

o una escuela, y la perdurabilidad de las ideas enunciadas. Si dentro del mundo griego hemos retenido sólo las doctrinas de Aristóteles, es, por una parte, porque él expresa con extraordinaria claridad las concepciones que ponen de manifiesto el paralelismo a que hemos hecho referencia y, por otra, porque constituye el "sistema de referencia" para todo el desarrollo posterior de la mecánica, hasta los albores de la ciencia moderna.

I. LA DOCTRINA ARISTOTÉLICA DEL MOVIMIENTO

1. *Introducción*

La física de Aristóteles desempeña un papel de primordial importancia durante la Antigüedad clásica y todo el medievo. Esto nos obliga a detenernos en ella un poco más extensamente que en otros casos históricos.

A grandes rasgos, podemos considerar que una teoría física es función de tres tipos de factores: *1*] metodología o utilización de procedimientos referidos al análisis de los hechos y a la verificación de hipótesis; *2*] un conjunto de posiciones epistémicas (sin que esto signifique necesariamente una epistemología tematizada) que provea la caracterización de los conceptos generales utilizados, en estrecho acuerdo con los datos experimentales recogidos, pero rebasándolos más o menos largamente en el sentido de la comprensión; *3*] la construcción de un sistema coherente tal, que los hechos analizados y las nociones utilizadas estén vinculados en una totalidad lógica suficientemente integrada.

En el caso de Aristóteles, la metodología se reduce a cierto número de observaciones inmediatas bastante pobres y limitadas por el proceso que llamaremos la "seudonecesidad". Por ejemplo, para él, los únicos movimientos admisibles son rectilíneos o circulares, y de aquí surgen sus conclusiones aberrantes sobre la trayectoria de los proyectiles. Las posiciones epistémicas quedan pues alteradas desde el comienzo, en ausencia de toda experimentación. Por el contrario, los hechos (considerados como tales) y los conceptos que los traducen están integrados en un sistema lógico impecable que explica su éxito multisecular, ya que fue necesario esperar hasta Newton para encontrar otro sistema tan coherente. Esta situación particular de una teoría de la mecánica de la cual nada ha quedado, pero encarnada en un sistema cuya sola capacidad deductiva le aseguró la perennidad, merece un examen detallado, tanto más cuanto en ausencia de una metodología experimental y por su sumisión "seudonecesaria" a los observables más indiferenciados, la física de Aristóteles ofrece numerosas aproximaciones posibles con los procesos de la psicogénesis.

2. *La teoría*

El movimiento tiene, para Aristóteles, un sentido muy amplio: "il y a autant d'espèces du mouvement que de l'être" (*Physique,* III, 1, 201a).[1]

["hay tantas variedades de movimiento como del ser"]

A esta conclusión llega después de haber sostenido, contrariamente a la doctrina de Platón (*Parmenide*, 138 B, 162 E; *Sophiste,* 248 E), que "il n'y a pas de mouvement hors des choses", afirmación esta última que fundamenta de la siguiente manera:

"en effet, ce qui change, change toujours ou substantiellement, ou quantitativement, ou qualitativement, ou localement; or ou ne peut trouver, nous l'avons dit, de genre commun à ces sujets du changement, qui ne soit ni individu particulier, ni quantité, ni qualité, ni aucun des chefs d'affirmation; par suite il n'y aura ni mouvement, ni changement en dehors des choses qu'on vient de dire, puisqu'il n'y a rien hors de ces choses" (*ibid*).

["en efecto, lo que cambia, cambia siempre o sustancial, o cuantitativa, o cualitativamente, o bien en su posición; como ya hemos dicho, no podemos encontrar un género común a esos sujetos del cambio, que no sea ni un individuo particular, ni cantidad, ni calidad, ni ningún sujeto de afirmación; por consiguiente no habrá ni movimiento, ni cambio fuera de las cosas que hemos dicho, puesto que nada hay fuera de esas cosas".]

En realidad, todo cambio es, para Aristóteles una forma de movimiento. Cada uno de los "modes de l'être" [modos del ser] a los cuales se ha referido en la cita precedente, "se réalise en toute chose d'une double façon: par exemple, pour l'individu déterminé, il y a sa forme, et sa privation; et aussi dans la qualité (blanc et noir); et aussi dans la quantité (l'achevé et l'inachevé); de même dans le mouvement local (le centrifuge et le centripète, ou le léger et le grave)".

["se realiza en todo de doble manera: por ejemplo, para el individuo determinado, está su forma y la privación de ella; también en la calidad (blanco y negro); y en la cantidad (lo acabado y lo inacabado); de la misma manera en el movimiento local (lo centrífugo y lo centrípeto, o lo liviano y lo pesado)"].

En síntesis, para cada modo del ser existen pares de contrarios a través de los cuales se realiza. El movimiento produce simplemente un pasaje de uno al otro de los elementos de cada par.

Esta característica de la doctrina aristotélica señala una indiferenciación muy notable entre lo orgánico y lo inorgánico, entre lo puramente mecánico y lo físico o físico-químico, y aun entre lo puramente biológico y lo cognitivo. Pues, si bien cada "modo del ser" tiene su propia "especie de movimiento", y si bien estas diversas formas de movimiento son comparables (VII, 4, 248a), en el análisis de las ca-

[1] Las citas de la *Física* de Aristóteles están tomadas del "Texte établi et traduit par Henri Carteron, Paris, Société d'Edition "Les Belles Lettres", 1926.

racterísticas mismas del movimiento puramente mecánico, que él designa como "transporte", Aristóteles recurre, en general, a las otras "especies" de movimiento y aplica al primero las observaciones y razonamientos que extrae de las últimas. Veamos algunos ejemplos.

El libro V de la *Física* comienza de la siguiente manera:

"Toute ce qui change change, soit par accident, par exemple quand nous disons d'un 'musicien' qu'il marche, car ce qui marche, c'est ce à quoi appartient comme accident 'musicien'; soit que l'on dise qu'une chose change, simplement parce que change quelque chose d'elle, par exemple toutes les expressions qui concernent ces parties; en effet le corps guérit, dit-on, parce que l'oeil ou la poitrine guèrissent. Et enfin il y a quelque chose qui n'est mû, ni par accident, ni à cause du mouvement d'une autre chose qui lui appartienne mais par le fait de se mouvoir soi même originairement. C'est là le mobile en soi, différent selon chaque sorte de mouvement, par exemple l'altérable et, dans l'altération, le guérissable ou le chauffable.

"De même pour ce qui meut: telle chose meut par accident; telle autre selon une partie, parce qu'une chose qui lui appartient meut; telle autre en soi originairement, par exemple le guérisseur guérit, la main frappe."

["Todo lo que cambia, cambia, sea por accidente, por ejemplo cuando decimos de un 'músico' que marcha, puesto que lo que marcha es aquello a quien pertence como accidente 'músico'; sea que decimos que una cosa cambia, simplemente porque cambia alguna cosa de ella, por ejemplo todas las expresiones que conciernen a sus partes; en efecto, decimos que el cuerpo se cura, porque el ojo o el pecho se curan. Finalmente, hay algo que no se mueve, ni por accidente ni a causa del movimiento de otra cosa que le pertenece, sino por el hecho de moverse a sí mismo originariamente. Ése es el móvil en sí, diferente según cada tipo de movimiento, por ejemplo lo alterable y, en la alteración, lo curable o lo calentable.

"Lo mismo para lo que mueve: tal cosa mueve por accidente; tal otra según una parte, puesto que una cosa que le pertenece mueve; tal otra en sí originariamente, por ejemplo, el curador cura, la mano golpea."]

Más adelante, después de hacer la distinción entre el término inicial y el término final del movimiento y de sostener que "c'est plutôt du terme final que du terme initial que le changement tire son nom" ["es más bien del término final que del término inicial que el cambio toma su nombre"], Aristóteles agrega:

"D'autre part dans ces fins du mouvement, ou peut encore faire la distinction de ce qui est par accident, et selon la partie ou selon autre chose que lui-même, et de ce qui est immédiatement et non pas selon autre chose: par exemple, une chose qui blanchit *change* par accident *en un objet de pensée*, car le fait d'être un objet de pensée est un accident pour la couleur; elle change aussi en une couleur, parce que le blanc est partie de la couleur; mais elle change par soi quand elle devient couleur blanche" (cursivas nuestras).

["Por otra parte en estos fines del movimiento, se puede además hacer la distinción de lo que es por accidente, y según la parte o según otra cosa que sí mismo, y lo que es inmediatamente y no según otra cosa: por ejemplo, una cosa que blanquea *cambia* por accidente *en un objeto de pensamiento*, puesto que el hecho de ser un objeto de pensamiento es un accidente para el color; cambia también en un color, puesto que lo blanco es parte del color; pero cambia por sí cuando deviene color blanco."]

En algunos otros pasajes Aristóteles analiza, como ejemplos de cambio que ilustran sobre la naturaleza y las características del movimiento, el acto de aprender o el acto de enseñar. Estos ejemplos no significan que Aristóteles adscriba a los seres inanimados la misma *causa* del movimiento que a los seres vivos. En efecto, a propósito de las cosas "qui sont mues par nature" ["que se mueven por su naturaleza"], dice: "Dire, en effet, que ces choses se meuvent elles-mêmes par leur propre action est impossible; car c'est là le propre de l'animal et des êtres animés" (libro VIII, 4, 255a, de la *Física*).

["Decir, en efecto, que esas cosas se mueven ellas mismas por su propia acción es imposible; puesto que allí reside lo propio del animal y de los seres animados."]

Sin embargo, también a dichas cosas les atribuye un "motor interno" como veremos luego. Pero ¿qué es el movimiento? Para explicarlo, Aristóteles establece una distinción célebre:

"D'abord il faut distinguer ce qui est seulement en acte et ce qui est d'une part en acte, d'autre part en puissance, et celà soit dans l'individu déterminé, soit dans la quantité, soit dans la qualité, et semblablement pour les autres catégories de l'être."

["En primer lugar es necesario distinguir lo que está solamente en acto y lo que está de una parte, en acto, y de otra, en potencia, y esto sea en el individuo determinado, sea en la cantidad, sea en la calidad, y en forma similar para las otras categorías del ser."]

La admisión de estas dos formas de existencia, en potencia y en acto, será la base de la definición de movimiento y también de la respuesta aristotélica a una de las paradojas de la escuela eleática. El movimiento será explicado, no como un pasaje de lo no existente a lo existente, sino como un cambio en el modo de existencia: la transición de lo potencial a lo actual. El texto correspondiente de la *Physique* es bien conocido (*Physique*, III, 1, 201a).

"Etant donnée la distinction, en chaque genre, de ce qui est en entéléchie, et de ce qui est en puissance, l'entéléchie de ce qui est en puissance, voilà le mouvement; par exemple de l'altéré, en tant qu'altérable, l'entéléchie est altération; de ce qui est susceptible d'accroissement et de son contraire ce qui est susceptible de déccroissement (il n'y a pas de nombre commun pour tous les deux), accroissement et diminution; du générable et du corruptible, génération et corruption; de ce qui est mobile quant au bien, mouvement local."

["Dada la distinción, en cada género, entre lo que es en entelequia, y lo

que es en potencia, la entelequia de lo que es en potencia, he ahí el movimiento; por ejemplo, de lo alterado, en tanto que alterable, la entelequia es la alteración; de lo que es susceptible de aumento y de su contrario, lo que es susceptible de disminución (no hay nombre común para ambos), aumento y disminución; de lo generable y lo corruptible, generación y corrupción; de lo que es móvil en cuanto al lugar, movimiento local."]

En el libro VIII, 4, 255a, hace una aclaración interesante a este respecto, luego de reconocer que la expresión "en puissance" se entiende en varios sentidos:

"Ce sont deux puissances différentes, que l'état du savant qui apprend, et celui du savant qui possède déjà sa science mais n'en fait pas l'objet actuel de son étude. Or c'est toujours quand sont ensemble l'actif et le passif, que ce qui est en puissance passe à l'acte. Exemple: celui qui apprend passe de la puissance à un état différente de puissance; car celui qui possède une science, mais sans en faire l'objet actuel de son étude, est savant en puissance d'une certaine façon, non pourtant comme avant d'apprendre, et, quand il est dans cet état, il passe à l'acte et exerce son savoir à condition que rien ne l'empèche; sinon, il serait dans un état qui contredirait sa capacité, autrement dit dans l'ignorance.

"De même pour les choses naturelles: le foid est en puissance du chaud, et après le changement le voici du feu, et il brûle à condition qu'il n'y ait ni empèchement, ni obstacle. De même pour le lourd et le léger. . . or l'acte du léger, c'est le fait d'être en un certain lieu, à savoir en haut. . ."

["Son dos potencias diferentes, la del sabio que aprende y la del sabio que posee ya su ciencia pero no la hace objeto actual de su estudio. Es siempre en cuanto a su conjunto, lo activo, lo pasivo, que lo que está en potencia pasa al acto. Ejemplo: el que aprende pasa de la potencia a un estado diferente de potencia; puesto que el que posee una ciencia, pero sin hacerla objeto actual de su estudio, es sabio en potencia de una cierta manera, no sin embargo como antes de aprender, y cuando está en ese estado, pasa al acto y ejerce su saber a condición de que nada se lo impida; si no, estaría en un estado que contradiría su capacidad, o sea en la ignorancia. Lo mismo para las cosas naturales: el frío está en potencia del calor, y luego del cambio éste del fuego, y se quema a condición de que no haya ni impedimento, ni obstáculo. Lo mismo para lo pesado y lo liviano. . . pero entonces el acto de lo liviano es el estar en cierto lugar, a saber, en lo alto."]

Veamos ahora, más en detalle, las características más importantes de la doctrina aristotélica acerca del movimiento. Para nuestro propósito, distinguiremos las siguientes características:

1. Hay dos tipos de movimiento: el movimiento natural y el movimiento forzado o violento. A esta conclusión llega Aristóteles por una vía muy curiosa. El movimiento forzado es, para él, inmediatamente evidente: basta con tirar una piedra para demostrarlo. Pero de ahí infiere que también tiene que existir el movimiento natural, "car le

forcé est contraire à la nature, et ce qui est contraire à la nature est posterieur à ce qui est conforme" (*Physique*, IV, 8, 215a) ["puesto que lo forzado es contrario a la naturaleza, y lo que es contrario a la naturaleza es posterior a lo que es conforme a ella"].

Este último "principio" le lleva a afirmar que "s'il n'y a pas par chacun de corps physiques de mouvement naturel, il n'y en aura d'aucune autre sorte" (*ibid.*) ["Si no hay movimiento natural para cada uno de los cuerpos físicos, no lo habrá de ningún otro tipo"].

2. La segunda característica de la doctrina aristotélica del movimiento se relaciona con la naturaleza de los cuerpos materiales. "Aquí, abajo" en el "mundo sublunar" hay sólo cuatro elementos simples: tierra, agua, aire y fuego. Todos los cuerpos, en el mundo sublunar, están constituidos por alguno de esos elementos simples, o por una mezcla de ellos en proporciones variadas. Hay, además, un orden natural de los elementos simples, y es el orden en el cual los hemos enumerado. Por eso cada cuerpo simple, cuando está fuera del lugar que le corresponde, está dotado de un movimiento natural que lo lleva a ocupar su lugar. Dicho movimiento es rectilíneo y va, o bien *hacia el centro* (hacia abajo), como en el caso de la tierra y el agua, o bien *hacia afuera* (hacia arriba), como el aire y el fuego. Es debido a esta tendencia natural que la tierra y el agua son "pesadas", y que el aire y el fuego son "ligeros". Es cierto que "le feu. . . n'a aucun poids, ni la terre aucune légereté" (*Du Ciel*, IV, 4, 311b) ["el fuego. . . no tiene ningún peso, ni la tierra ninguna levedad"], pero en cambio, con respecto al aire y al agua, la situación es diferente: "ni l'un ni l'autre n'est absolument léger, ni absolument lourd; ils sont tous deux plus légers que la terre (car une de leurs parties, prise au hasard, monte à sa surface), et plus lourds que le feu (car une de leurs parties, quelle que soit sa quantité, repose au-dessous de lui); comparés l'un à l'autre, cependant, l'un est absolument lourd, et l'autre absolument léger, puisque l'air, quelle que soit sa quantité, monte à la surface de l'eau, et que l'eau, quelle que soit sa quantité, repose au dessous de l'air" (IV, 4, 311a).

["ni el uno ni la otra son absolutamente livianos, ni absolutamente pesados; ambos son más livianos que la tierra (puesto que una de sus partes, tomada al azar, sube a la superficie), y más pesados que el fuego (puesto que una de sus partes, cualquiera sea su cantidad, queda debajo de él); comparados entre sí, sin embargo, una es absolutamente pesada, y el otro absolutamente liviano, puesto que el aire, cualquiera sea su cantidad, sube a la superficie del agua, y el agua, cualquiera sea su cantidad, reposa por debajo del aire"].

La distinción que establece Aristóteles entre el agua o el aire, por un lado, como elementos "intermedios", y el fuego o la tierra, por el otro, como elementos "extremos", es muy sorprendente y, en ciertos casos, difícil de interpretar. Quizá la más curiosa de esas distinciones

es la que se refiere a la reciprocidad del predicado "semejanza". En un texto muy controvertido, y sobre el cual volveremos más adelante, podemos leer:

". . . les éléments qui se suivent sont semblables les uns aux autres: ainsi l'eau est semblable à l'air et l'air au feu; et, entre les éléments intermédiaires, la relation peut s'inverter, *mais non pas quand c'est entre eux et les extrèmes*. . . (*Du Ciel*, IV, 3, 310b [cursivas nuestras]).

["los elementos que se siguen son semejantes entre sí: así, el agua es semejante al aire y el aire al fuego; y entre los elementos intermedios, la relación puede invertirse, pero no cuando es entre ellos y los extremos. . ."]

Es interesante notar que la Tierra misma no desempeña ningún papel en este movimiento. El "centro" al cual se refiere Aristóteles es el centro del universo, y si bien el centro de la Tierra y el centro del universo coinciden, es hacia este último y no hacia el primero que se dirigen los cuerpos pesados. Hay una larga disquisición en *Du Ciel* (II, 14, 296b) para explicar este hecho, pero la siguiente cita del capítulo IV es concluyente:

"Or, ce qui produit le mouvement vers le haut et vers le bas est ce qui produit le lourd et le léger, et ce qui est mû est en puissance lourd ou léger, et la translation de chaque corps vers son lieu propre est un mouvement vers sa propre forme. (C'est d'ailleurs de cette façon qu'il est préférable de comprendre ce qu'on dit les anciens philosophes, que *le semblable se meut vers le semblable*, car cela n'arrive pas dans tous les cas. Si, en effet, on mettait la Terre à la place où la Lune se trouve présentement, chacune des parties de terre ne se dirigerait pas vers elle, mais bien vers l'endroit même où la Terre est à présent. . .)" (*Du Ciel*, IV, 3, 310a).

["Lo que produce el movimiento hacia arriba y hacia abajo es lo que produce lo pesado y lo liviano, y lo que es movido es en potencia pesado o ligero, y la traslación de cada cuerpo hacia su lugar propio es un movimiento hacia su propia forma. (Es, por otra parte, de esta manera que es preferible interpretar lo que dicen los filósofos antiguos, que *lo similar se mueve hacia lo similar*, puesto que esto no ocurre en todos los casos. Si, en efecto, se pusiera a la Tierra en el lugar en que se encuentra ahora la Luna, cada una de las partes de tierra no se dirigiría hacia ella, sino hacia el lugar donde está ahora la Tierra. . .)"].

Señalemos, finalmente, que en *Du Ciel* los elementos simples son definidos a partir del tipo de movimiento: ". . .parmi les corps, les uns sont simples, et les autres composés des corps simples (j'apelle *simples* ceux qui possedent naturellement un principe de mouvement, par exemple le feu, la terre et leurs spèces, ainsi que les éléments analogues à ceux-là)" (Libro I, cap. 2).

[". . .entre los cuerpos, unos son simples, y otros son compuestos de cuerpos simples (llamo *simples* a los que poseen naturalmente un principio de movimiento, por ejemplo el fuego, la tierra y sus especies, así como los elementos análogos a ellos)"].

3. Una de las características más importantes de la doctrina aristotélica es la necesidad de un "motor" que pueda identificarse como causa del movimiento. Pero la distinción ya establecida entre movimientos naturales y movimientos forzados conduce a establecer también una distinción paralela entre dos tipos de "motores": ". . .il est impossible à une chose de mouvoir, soit à partir de soi vers une autre, soit à partir d'une autre vers elle même, sans contact; par suite, entre ce qui meut et ce qui est mû selon le lieu, il n'y a évidemment pas d'intermédiaire" (VII, 2, 244b).

[". . .es imposible que una cosa mueva, sea a partir de sí hacia otra, sea a partir de otra hacia ella misma, sin contacto; por consiguiente, entre lo que se mueve y lo que es movido según el lugar, no hay evidentemente intermediario".]

Para los últimos, "la nature est un principe interne de mouvement" (*Du Ciel*, III, 2, 301b) ["La naturaleza es un principio interno de movimiento"], definición ya dada en la *Physique* (II, 1, 192b) donde se señala que la naturaleza es una fuente o causa por la cual algo se mueve o queda en reposo en virtud de sí mismo y "no en virtud de un atributo concomitante". En este último texto aclara, sin embargo, que debemos distinguir la naturaleza de una cosa, de los atributos que le pertenecen en virtud de lo que es, como en el caso de la propiedad del fuego de ser movido hacia arriba, la cual no "posee naturaleza" sino que se realiza "de acuerdo con" la naturaleza.

El movimiento natural tiene, pues, una causa intrínseca ("motor interno"). El "contacto" entre el motor y el móvil es aquí obvio. Pero los movimientos violentos proceden de una causa exterior ("motor externo"), de una *fuerza* que los impulsa a trasladarse en contra de su propia naturaleza:

". . .une force est une source de mouvement dans une autre chose, ou dans la même chose en tant qu'autre, et puisque le mouvement est toujours soit naturel, soit forcé, le mouvement naturel, tel que, pour la pierre, le mouvement vers le bas, ne sera qu'accéléré sous l'action d'une force, tandis que le mouvement contre nature sera produit d'une façon complète par la force elle-même" (*Du Ciel*, III, 2, 301b).

[". . .una fuerza es una fuente de movimiento en otra cosa, o en la misma cosa en tanto que otra, y puesto que el movimiento es siempre o bien natural, o bien forzado, el movimiento natural, tal como el movimiento hacia abajo para la piedra, no será sino acelerado bajo la acción de una fuerza, mientras que el movimiento contra la naturaleza será producido por completo por la fuerza misma".]

4. Todo movimiento necesita un medio dentro del cual se desplace el móvil. Sólo así podrá explicar Aristóteles la posibilidad de un movimiento violento cuando ha cesado la fuerza que le dio el impulso inicial. La dificultad del problema es reconocida en el libro VIII de la *Física* (VIII, 1, 266b):

"Si, en effet tout mû est mû par quelque chose, comment, parmi les choses qui ne se meuvent pas soi-même, certaines continuent, elles a être mûes sans être touchées par le moteur? Par exemple les projectiles."

["Si, en efecto, todo lo que se mueve se mueve por alguna cosa ¿cómo es que entre las cosas que no se mueven a sí mismas, algunas siguen moviéndose sin ser tocadas por el motor? Por ejemplo los proyectiles."]

Debemos tener en cuenta que si bien la fuerza que impulsa al proyectil produce "movimiento", dicho movimiento corresponde, en términos de parámetros cinemáticos, a la *velocidad*. La gran conquista de la mecánica del siglo XVII, al introducir en forma explícita la noción de inercia, consistió en asociar la fuerza con la aceleración y no con la velocidad. Por eso, para Aristóteles, para quien la idea misma de inercia era absurda (como veremos más adelante), al cesar la fuerza debería cesar el movimiento. Pero, puesto que el movimiento sigue, se ve obligado a buscar otro "motor" que permanezca en contacto con el móvil y sea la causa de su desplazamiento. El siguiente pasaje resume la bien conocida explicación que habrá de perdurar durante siglos:

"Or, si l'on dit que le moteur meut, outre son mû, autre chose encore, par exemple l'air, lequel mouvrait en étant mû, il reste impossible qu'il y ait mouvement de l'air sans que le moteur originaire le touche et le meuve. Mais, au contraire, tout cela va ensemble, et pour le mouvement, et pour la cessation de celui-ci quand le moteur premier cesse de mouvoir. Et celà est nécessaire, même si le moteur meut à la façon de l'aimant, c'est-à-dire en faisant que qu'il a mû meuve à son tour. Il faut donc en venir à dire que ce qui a mû en premier a rendu capable de mouvoir, ou l'air devenu tel, ou l'eau, ou les autres choses qui sont telles que par nature elles meuvent et soient mues. Toutefois ce n'est pas en même temps que cette chose cesse de mouvoir et d'etre mue: elle cesse d'être mue quand le moteur cesse de mouvoir, mais elle est encore motrice à ce moment; aussi quelque chose est-il mû qui est en contiguité avec autre chose, à propos de quoi ou raisonnera de même. Mais l'action tend à cesser quand la force motrice est de plus en plus faible par rapport au terme contigu qu'elle aborde, et elle cesse à la fin quand l'avant-dernier moteur ne rend pas moteur, mais seulemente mû, le terme qui lui est contigu. Alors simultanément le moteur, le mû, et tout le mouvement doivent s'arrêter.

"Ce mouvement-là se produit donc dans les choses qui peuvent être, soit en mouvement, soit en repos; et il n'est pas continu, quoiqu'il en ait l'apparence parce que les choses auxquelles il se rapporte sont, ou consécutives, ou en contact: le moteur en effet n'est pas un, mais il y a une série de moteurs mutuellement contigus; c'est pourquoi un tel mouvement à lieu dans l'air et dans l'eau, et certains l'appellent *retour en contre-coup*" (περιστασιζ) (*Física*, VIII, 1027a).

["Si decimos que el motor mueve, además de lo que se mueve, otra cosa más, por ejemplo el aire, el cual movería siendo movido, sigue siendo imposible que hubiera movimiento del aire sin que el motor originario lo toque y lo mueva. Pero, por el contrario, todo ello va junto, para el movimiento y para la cesación de éste cuando el motor originario cesa de mover. Y esto es necesario, aun si el motor mueve a la manera del imán, es decir, haciendo que lo que él ha movido mueva a su vez. Es pues necesario llegar a afirmar que lo primero movido ha hecho capaz de mover, o el aire, o el agua, o las otras cosas que son tales que por naturaleza mueven y son movidas. En todo caso no es al mismo tiempo que esta cosa cesa de mover y de ser movida: cesa de ser movida cuando el motor cesa de mover, pero es aún motora en ese momento; también una cosa es movida por contigüidad con otra cosa, a propósito de lo cual razonaremos de la misma manera. Pero la acción tiende a cesar cuando la fuerza motriz es más y más débil en relación con el término contiguo que aborda, y cesa al fin cuando el penúltimo motor solamente mueve pero no torna motor al término que le es contiguo. Entonces simultáneamente el motor, lo movido y todo el movimiento deben detenerse.

"Ese movimiento se produce pues en las cosas que pueden estar, sea en movimiento, sea en reposo; y no es continuo, aunque lo sea en apariencia puesto que las cosas con las cuales se relaciona son, o consecutivas, o están en contacto: el motor, en efecto, no es uno solo, sino que hay una serie de motores mutuamente contiguos; es por eso que tal movimiento tiene lugar en el aire y en el agua, y algunos lo llaman *retorno a contragolpe*" (περιστασις).]

Una vez introducido el "mecanismo" que asegura la *continuación* del movimiento, la coherencia del razonamiento obliga a Aristóteles en la última parte del texto citado a renunciar a su *continuidad*: el movimiento es continuo sólo en apariencia; la sucesión de "remplazos" del aire que impulsa al móvil, supone una sucesión de "motores"; y el remplazo de un motor por otro, aunque sea instantáneo, implica una cesación, también instantánea, de la fuerza y, por consiguiente, del movimiento mismo. No se trata, pues, de un único movimiento, sino de "una serie de movimientos consecutivos". El *único* movimiento continuo es el causado por el "motor inmóvil"; y este movimiento es continuo porque el motor permanece siempre invariable, de modo que su relación con lo que mueve permanece también invariable y continua. Aquí como en toda su obra, Aristóteles, que es ante todo un lógico, acepta sin titubear las consecuencias últimas de las premisas que ha introducido en su razonamiento.

Pero el aire no actúa solamente en los movimientos horizontales u oblicuos de los proyectiles. En el pasaje ya citado de *Du Ciel* (III, 2, 301b), en el cual distingue el efecto de la fuerza en un movimiento natural o en un movimiento violento, Aristóteles agrega:

"Mais dans un cas comme dans l'autre, c'est l'air qui sert à la force en quelque sorte d'instrument, car l'air est à la fois naturellement pesant et léger, et de cette façon, en tant que léger, il produira le mouvement vers le haut, quand il est poussé et qu'il reçoit l'impulsion initiale de la force, et, en tant que pesant, il produira encore le

mouvement vers le bas. C'est en effet, par une sorte d'impression de l'air que la force transmet le mouvement au corps dans chacun de ces cas. C'est ce qui explique que le corps mû d'un mouvement forcé continue à se mouvoir, même quand ce qui lui donnait l'impulsion cesse de l'accompagner."

["Pero tanto en un caso como en el otro, es el aire el que sirve a la fuerza a manera de instrumento, puesto que el aire es a la vez naturalmente pesado y liviano, y así, en tanto que ligero, producirá movimiento hacia arriba, cuando es empujado y recibe el impulso inicial de la fuerza, y en tanto que pesado, producirá además un movimiento hacia abajo. Es, en efecto, por una suerte de impresión del aire que la fuerza transmite el movimiento al cuerpo en cada uno de estos casos. Es lo que explica que el cuerpo movido por un movimiento forzado continúe moviéndose, aun cuando lo que le dio el impulso cesa de acompañarlo".]

5. El movimiento en el vacío es imposible. Para demostrarlo, Aristóteles recurre a dos tipos de argumentos aplicables, respectivamente, a los movimientos naturales y a los movimientos forzados. Con respecto a los primeros, Aristóteles se pregunta "comment y aura-t-il un mouvement naturel, quand il n'y a aucune différence" ["cómo podría haber un movimiento natural, cuando no hay ninguna diferencia"]. En efecto, "dans le vide, le haut ne diffaccording en rien du bas; car du rien il n'y a aucune différence, de même du non-être; et le vide semble être un non-être et une privation".

["en el vacío, arriba no difiere en nada de abajo; puesto que de la nada no hay ninguna diferencia, lo mismo que del no-ser; y el vacío aparece como un no-ser y una privación"]. Pero, por el contrario, "le transport naturel comporte des différences; et les choses naturelles comportent des différences par nature" ["el transporte natural requiere diferencias; y las cosas naturales requieren diferencias por naturaleza"]. De aquí sigue, pues, la consecuencia lógica, expresada como alternativa: "ou il n'y a de transport naturel en aucune lieu et pour rien, ou s'il y en a, il n'y a pas de vide" ["o no hay transporte natural en ningún lugar y por nada, o si lo hay, no hay vacío"].

En cuanto a los movimientos forzados, Aristóteles toma el ejemplo del proyectil:

". . .les projectiles se meuvent en fait hors de la main de celui qui les a poussés, soit par le retour en contre-coup, selon certaines théories, soit par la poussée de l'air poussé qui imprime au projectile un mouvement plus rapide que son transport vers le lieu naturel. Mais dans le vide, rien de cela ne peut se passer, et un transport n'est possible que par un véhicule".

[". . .los proyectiles se mueven de hecho fuera de la mano del que los ha empujado, sea por el retorno a contragolpe, según ciertas teorías, sea por el empuje del aire empujado que imprime al proyectil un movimiento más rápido que su transporte hacia el lugar natural. Pero en el vacío, nada de esto puede pasar y un transporte no es posible más que por un vehículo".]

Aquí agrega un argumento sorprendente:

"En outre, ou ne saurait dire pourquoi un corps mue s'arrêtera quelque part; pourquoi serait-ce ici plutôt que là? de sorte que nécessairement ou il sera en repos ou nécessairement il sera transporté à l'infini, si rien de plus fort ne l'arrête" (*ibid.*).

["Por otra parte, no podríamos decir por qué un cuerpo en movimiento se detendrá en alguna parte; ¿por qué lo hará aquí más bien que allá? de modo que necesariamente o bien él estará en reposo, o será necesariamente transportado al infinito, si nada más fuerte lo detiene".]

Es evidente que estamos aquí muy cerca del principio de inercia, cuyo enunciado sería correcto excepto por la expresión "nécessairement il sera transporté à l'infini", que es ambigua. Podría significar "necesariamente no se detendrá nunca", pero ha sido frecuentemente interpretada como "adquirirá necesariamente una velocidad infinita". De una u otra forma, Aristóteles rechaza la idea como absurda y extrae *como consecuencia* que el vacío es imposible.

6. Hay sólo dos movimientos naturales simples: el rectilíneo y el circular. La razón es que "ces grandeurs sont les seules qui soient simples, à savoir la ligne droite et la ligne circulaire" (*Du Ciel,* I, cap. 2) ["estas magnitudes son las únicas simples, a saber, la línea recta y la línea circular"].

Para los movimientos naturales, el movimiento circular "est le mouvement qui tourne autour du centre" ["es el movimiento que gira alrededor del centro"] (se trata, por supuesto, del centro del universo); mientras que el movimiento en línea recta es "celui qui se dirige vers le haut ou vers le bas" ["el que se dirige hacia arriba o hacia abajo"]. Pero los dos movimientos no son considerados a un mismo nivel. El movimiento circular es perfecto, mientras que la línea recta no es perfecta: "n'est parfaite, en effet, ni la ligne droite infinie (car elle devrait, pour être parfaite, avoir limite et fin), ni aucune ligne droite finie (car toutes ont quelque chose en dehors, puisque l'on peut prolonger n'importe quelle ligne droite)" (*ibid.*) ["en efecto, no son perfectas ni la línea recta infinita (puesto que debería, para ser perfecta, tener principio y fin), ni ninguna línea recta finita (puesto que todas tienen algo afuera, ya que se puede prolongar cualquier línea recta)"].

3. *Un ejemplo de razonamiento aristotélico*

Además del contenido mismo de las ideas de Aristóteles sobre el movimiento, es interesante analizar el tipo de razonamiento que utiliza para llegar a sus conclusiones. Aquí, el juego de lo posible, lo imposible y lo necesario se puede detectar de una manera muy clara. El razonamiento aristotélico corresponde, como mostraremos de inmediato, a la etapa que psicogenéticamente está caracterizada por el predominio de las seudoimposibilidades y las seudonecesidades. Sus dos rasgos distintivos aparecen claramente discernibles a través de su

argumentación: la confusión entre lo *general* y lo *necesario*, por una parte, y la indiferenciación de lo *fáctico* y lo *normativo* por la otra. Hay un "debe ser así" que impone limitaciones estrictas a lo que es aceptable como posible, y tales limitaciones persistieron en muchos casos (a los cuales tendremos ocasión de referirnos más adelante) durante siglos, constituyendo barreras infranqueables para el desarrollo del pensamiento científico. La constitución de la física y, particularmente, la mecánica, como ciencia, con las características que hoy consideramos como primarias en toda explicación de tipo científico, consistió, en buena parte, en la superación de dichas barreras (o, por lo menos, la eliminación de éstas constituyó un requisito indispensable para el desarrollo de aquélla).

A fin de precisar las ideas tomaremos un ejemplo que puede ser considerado como típico representante del razonamiento aristotélico. El capítulo 2 del libro I de *Du Ciel* lleva el título: "Démostration de l'existence d'un cinquième Elément, doué d'un mouvement circulaire". En lugar de transcribir el extenso texto, será más útil señalar explícitamente las "premisas" sobre las cuales basa sus deducciones, y mostrar luego cómo llega a la conclusión.

Premisas

1. Todo movimiento que es según el lugar, y que llamaremos traslación, es o bien rectilíneo, o circular, o una mezcla de los dos.

2. Toda traslación simple, o bien se aleja del centro, o bien tiende hacia él, o bien gira alrededor de él.

3. El movimiento simple es el de un cuerpo simple.

4. Los movimientos de los cuerpos simples son simples, y los movimientos de los cuerpos compuestos son mixtos; en este último caso, el movimiento será el que corresponda al elemento que predomina.

5. Para cada cuerpo simple hay solamente un movimiento natural.

6. El movimiento hacia arriba y el movimiento hacia abajo son contrarios entre sí.

7. Una sola cosa no puede tener más de un contrario.

8. El círculo es perfecto.

9. La línea recta no es perfecta.

10. Lo perfecto es por naturaleza anterior a lo imperfecto.

Demostración

i] El movimiento circular no puede ser el movimiento natural de alguno de los cuatro elementos sublunares (por [5]).

ii] Tampoco puede ser el movimiento natural de una mezcla de ellos (por [4]).

iii] Tiene que ser el movimiento de un cuerpo simple (por [3]).

iv] Tiene que ser un movimiento natural, pues si no lo fuera tendríamos dos posibilidades igualmente falsas:

a] Si el cuerpo cuyo movimiento es circular es fuego o algún otro elemento de este género, su movimiento natural será lo contrario del movimiento circular. Pero esto es imposible, debido a [6] y [7].

b] Si, por otra parte, el cuerpo movido por un movimiento contra la naturaleza es una cosa diferente de los elementos, deberá poseer algún otro movimiento que le sea natural. Pero esto es imposible, puesto que si el movimiento es hacia arriba, ese cuerpo será fuego o aire, y si es un movimiento hacia abajo, será agua o tierra. Y esto ha sido ya demostrado como imposible.

v] Tiene que ser anterior al movimiento rectilíneo (por [8], [9] y [10]). Y Aristóteles concluye: "Estas consideraciones muestran por consiguiente que existe naturalmente alguna otra sustancia corporal, fuera de los compuestos de aquí abajo, más divina que todas ellas y anteriores a ellas."

El extenso razonamiento que hemos glosado es inobjetable en cuanto al encadenamiento lógico entre las premisas y las conclusiones. La lógica de Aristóteles procede con todo rigor y las conclusiones se imponen como ineludibles, una vez que las premisas son aceptadas.

4. *Características de la física de Aristóteles*

La física de Aristóteles no parte del estudio de ciertos tipos particulares de movimiento, sino de ciertos principios generales de carácter metafísico. Aristóteles no analiza, como lo hará Galileo dos mil años después *cómo caen los cuerpos*. Parte de una observación general: *los cuerpos caen*. Y trata de *inferir* cómo caen por medio de un razonamiento riguroso basado en sus principios metafísicos. Las conclusiones a las cuales arriba son increíblemente erradas. Una observación empírica muy elemental hubiera bastado para rechazarlas. Pero este resultado de su sistema no es tan sorprendente si se analiza con cuidado su lógica interna y su base epistemológica. De esto nos ocuparemos en las conclusiones, pero conviene aclarar desde ahora algunos puntos.

Para Aristóteles, las características del movimiento dependen de la naturaleza del cuerpo que se mueve, y de la naturaleza de la fuerza que lo mueve. Ni una ni otra, en tanto *naturaleza*, son observables directamente. Pero podemos inferirlas a partir de la experiencia general. Las cosas son como son porque está en su naturaleza ser así y, por consiguiente, lo que es, debe *necesariamente* ser así. Abandonados a sí mismos, los trozos de piedra quedan debajo del agua, el aire se mantiene encima de ella, y el fuego asciende a través del aire. Éste es un *hecho general de la experiencia* que muestra cuál es el orden

natural de los elementos. También es un hecho general de la experiencia que los cuerpos que caen, o que se elevan, se desplazan en línea recta, y que los astros giran en círculos alrededor de la Tierra. Como es, asimismo, una observación general de nuestra experiencia inmediata que el reposo es contrario al movimiento.

A través de este tipo de *experiencia inmediata, general y cualitativa* podemos llegar a la naturaleza de las cosas. Luego podemos *deducir* el *cómo* de su comportamiento, que tiene que ser coherente tanto con la naturaleza de las cosas como con *principios* también muy *generales, indemostrables, impuestos por la razón* (como por ejemplo, que lo perfecto tiene que ser necesariamente anterior a lo imperfecto). Por eso no se preocupa Aristóteles por verificar si realmente los cuerpos más pesados caen con más rapidez que los más livianos. Es una consecuencia de sus principios y de otras observaciones generales. Tiene, pues, que aceptarlo sin que surja en ningún momento la necesidad de concebir una experiencia que lo verifique. Pero esto tampoco debe sorprendernos. Ni Galileo, ni Huygens verificarán las consecuencias de los principios de los cuales estaban perfectamente convencidos.

Desde esta perspectiva, la posición que han presentado corrientemente los textos clásicos de historia de la ciencia (posición que, como veremos más adelante, ha sido parcialmente revisada en los últimos 25 años) para explicar la diferencia entre la mecánica que surge en el siglo XVII con Galileo, Descartes, Huygens y Newton, por una parte, y la mecánica de la Antigüedad griega y del período medieval, por la otra, es insostenible. Según ella, la diferencia entre la ciencia aristotélica y la ciencia moderna, producto del siglo XVII, reside en la siguiente observación: mientras que Galileo y sus continuadores elaboran sus teorías a partir de la observación y la experimentación, el mundo antiguo y medieval se caracteriza por buscar en la meditación, en la reflexión especulativa, respuesta a sus interrogantes sobre la naturaleza, sin verificar jamás sus conclusiones mediante la experiencia. Esta explicación es sólo parcialmente válida y, desde el punto de vista epistemológico, ignora los mecanismos esenciales del proceso del conocimiento. La oposición entre ambos períodos históricos no reside, en modo alguno, en la aceptación o el rechazo de la necesidad de la observación empírica, ni tampoco en la utilización de los métodos deductivos. La explicación debe buscarse en otra parte. Pero antes debemos avanzar un poco más en el análisis de los hechos históricos.

5. *Las críticas a la doctrina de Aristóteles*

Las teorías de Aristóteles sobre el movimiento de un proyectil van a ser vigorosamente refutadas por Joannes Philoponus, en el siglo V de

nuestra era, en sus "Comentarios sobre la Física de Aristóteles".[2] Philoponus considera que cualquiera de las formas posibles de antiperístasis es increíble y bordea lo fantástico. En efecto, el aire debería realizar tres movimientos distintos: debe ser empujado hacia adelante por el proyectil, luego debe moverse hacia atrás ("como obedeciendo a una orden"), y por último debe cambiar nuevamente de dirección y moverse hacia adelante, empujando el proyectil. ¿Cómo es, se pregunta Philophonus, que el aire no sufre difusión alguna y que va a incidir exactamente en la parte posterior del proyectil? Además, ¿cuál es la fuerza que otorga a este mismo aire, empujado al comienzo hacia adelante, un impetus que lo vuelva hacia atrás?

La segunda teoría es refutada con un ejemplo que es aplicable también a la antiperístasis. Si realmente es el aire el que produce el movimiento del proyectil, después que ha sido lanzado, ¿qué necesidad tiene la piedra de estar en contacto con la mano, o la flecha con la cuerda del arco? Bastaría con tener una máquina que pusiera el aire en movimiento detrás de ellas y la piedra o la flecha se moverían sin otro contacto que el del aire. Pero el hecho es que "aun si se pone en movimiento todo el aire detrás del proyectil con toda la fuerza posible, el proyectil no se moverá. . ."

Philoponus se acerca en su concepción del movimiento a una posición mucho más moderna:

"Celui qui lance un projectile infuse en ce projectile une certaine action, une certainne puissance de ce mouvoir, qui est incorporelle."[3]

["Quien arroja un proyectil infunde a ese proyectil cierta acción, cierta potencia de movimiento, que es incorpórea".]

También combate las ideas aristotélicas sobre el vacío: "Rien n'empeche un homme de lancer une pierre ou une fleche, lors même qu'il n'y aurait d'autre milieu que le vide. Le milieu gene le mouvement des projectiles qui ne peuvent avancer sans le diviser; ceux-ci, toutefois, se mouvent au sein de ce milieu. Rien donc n'empechera qu'une fleche, une pierre ou tout autre corps puisse etre lancé dans le vide; sont presents, en effet, le moteur, le mobile et l'espace qui doit recevoir le projectile" (*ibid.*).

["Nada impide a un hombre lanzar una piedra o una flecha aun cuando no haya otro medio que el vacío. El medio obstaculiza el movimiento de los proyectiles que no pueden avanzar sin dividirlo; éstos, sin embargo, se mueven en el seno de ese medio. Nada impedirá, por consiguiente, que una flecha, una piedra o cualquier otro cuerpo pueda ser lanzado en el vacío; en efecto, están presentes el motor, el móvil y el espacio que debe recibir el proyectil".]

[2] Cf. Fragmento publicado por Cohen y Drabkin en *Source book in Greek Science*, 1948.

[3] Fragmentos traducidos por Duhem y reproducidos por Dugas en su *Histoire de la Mécanique*, Neuchâtel, Ed. du Griffon, 1950, p. 47.

Estas consideraciones de Philoponus no habrán de influir, sin embargo, en la aceptación de la teoría aristotélica. No es éste un hecho histórico trivial. Al leer hoy las explicaciones de Aristóteles y la refutación de Philoponus, parecería "obvio" que cualquier "adulto normal" hubiera optado por la posición de este último y que, por consiguiente, la explicación del movimiento del proyectil dada por el primero hubiera quedado definitivamente eliminada. Pero no fue así. Simplicio (siglo VI) atacó a Philoponus en sus "Digressions contre Jean le Grammairien" anexas a sus "Comentarios sobre la *Física* de Aristóteles", traducidos al latín en el siglo XIII. Durante toda la Edad Media el mundo occidental cristiano ignoró las ideas de Philoponus excepto en la versión deformada de Simplicio. Entre los árabes hay, sin embargo, una línea que sufre su influencia, a partir de Avicena (980-1037). Pero no hay indicios de continuidad con la escuela del "impetus" que florecerá en París en el siglo XIV, y en la cual Buridan repetirá, sin saberlo, los argumentos de Philoponus. Una vez más, la "evidencia" tiene que aguardar muchos siglos para ser aceptada como tal.

II. LA MECÁNICA MEDIEVAL

El siguiente período en el cual nos detendremos en nuestro estudio está constituido por los últimos siglos de la Edad Media. Esta selección está impuesta por cuestiones prácticas de limitación de espacio y por el objetivo mismo que hemos enunciado en un comienzo.

1. *La persistencia del sistema de Aristóteles*

Aristóteles, Euclides, Arquímedes, Heron, Ptolomeo, son sucesivamente traducidos al latín en el siglo XII, primero a partir de los textos árabes, luego, hacia el fin del siglo y en pleno siglo XIII, directamente del griego. Là mayor parte de las obras griegas que habían sobrevivido son conocidas a fines del siglo XIII en latín por el mundo occidental cristiano. En el siglo XIV se lo comienza a traducir a las lenguas populares (francés, italiano, español). El "sistema" de Aristóteles mantuvo su continuidad a través del mundo árabe y reaparece en Europa Occidental en los siglos XII y XIII. La extraordinaria influencia que tuvo su pensamiento durante el período que llega hasta el siglo XVII se debió a tres factores:

a] Proporcionó el marco conceptual que sirvió de marco de referencia a la especulación científica: las nuevas ideas fueron presentadas casi invariablemente en forma de comentarios a los textos clásicos.

b] Señaló la naturaleza de las cuestiones que eran objeto de estudio (¿qué tipo de preguntas hay que responder cuando se estudia el movimiento de un cuerpo?)

c] Estableció el tipo de "explicación" que debía buscarse, introduciendo la idea de explicar racionalmente la naturaleza a través de una demostración lógica que partiera de premisas aceptadas (aunque, a su vez, indemostrables).

Dentro de este marco de referencia, el período que nos ocupa se caracteriza por profundas discusiones acerca del método de la ciencia. La base teológica está permanentemente presente, no sólo porque quienes se dedican a este tipo de especulaciones son, salvo raras excepciones, miembros de la iglesia, sino porque ninguna forma "libre" de pensamiento tiene lugar sin ser censurada por ella. Pero aun así, el análisis del significado, los instrumentos teóricos y las técnicas mismas de la investigación científica son llevados —como en el caso de Ockham— hasta los límites de la herejía. La profundidad de esas especulaciones es tal, que frente a ellas no es realmente mucho lo que agrega la *metodología* de la ciencia antes de llegar al siglo XIX. Sin detenernos a presentar una serie de citas para sustentar este aserto, basta mencionar la obra de A.C. Crombie *Robert Grosseteste and the origins of experimental science, 1100-1700*, que presenta textos sorprendentes de Grosseteste y sus sucesores (Albert le Grand, Roger Bacon, Pierre de Maricourt, Wittelo, etc.) con respecto a la física; en particular sobre el papel de la inducción, el carácter experimental de dicha ciencia, el juego de las hipótesis y la deducción, y la tendencia a la matematización de la física.

En este sentido, la escolástica avanza considerablemente sobre la metodología de Aristóteles y aun exhuma ciertos aspectos del pensamiento de Platón, alternando la oposición entre ambos con la búsqueda de una síntesis (cf. la sección sobre conclusiones). Esta "superación" de la posición aristotélica significa sólo parcialmente un resquebrajamiento de su autoridad. Su *Física* sigue siendo el único *sistema* coherente que intenta explicar todos los fenómenos del universo. Pero sus textos no son ya materia indiscutible, por lo menos a partir de 1277 cuando el obispo de París y el arzobispo de Canterbury condenan la enseñanza de Aristóteles.

En realidad el sistema aristotélico preocupa a la iglesia sólo en un punto, que Averroes había llevado demasiado lejos: el determinismo de la *Física* de Aristóteles no dejaba espacio suficiente para el libre ejercicio de la voluntad de Dios. Es, pues, la versión averroísta de Aristóteles la que va a ser condenada, pero esto abre la puerta a la duda con respecto a ciertas afirmaciones del maestro que no parecían resistir una confrontación elemental con la experiencia. Si combinamos los dos elementos mencionados, es decir, la profundización del análisis metodológico y la liberación de la autoridad suprema del maestro, podría esperarse que tres siglos de especulaciones condujeran a un enorme avance en la ciencia del movimiento. Pero no fue así. Los resultados son magros, pero no por ello menos interesantes

para el análisis epistemológico, porque es aquí donde podremos encontrar la clave de un hecho histórico tan singular, al cual hicimos ya referencia previamente, como es la perduración durante tantos siglos de "explicaciones" que habrían de ser consideradas, a partir del siglo XVII, como totalmente absurdas para el más elemental "sentido común". Basta recordar a este respecto las extraordinarias características atribuidas al movimiento del aire, cuyo papel en la teoría aristotélica vimos ya cómo fue ridiculizado por Philoponus en el siglo V. En pleno siglo XVI, encontramos a un hombre de la talla de Tartaglia quien afirmará que si un cañón envía dos proyectiles, uno después del otro (en idénticas condiciones de carga, etc.), el segundo irá más lejos que el primero puesto que "encontrará el aire ya dividido y por consiguiente más fácil de penetrar".

Pero antes de abocarnos a este análisis y de extraer las conclusiones de orden epistemológico, veamos cuáles son las contribuciones que este período de la historia medieval aporta al contenido de la ciencia del movimiento. Nos ocuparemos solamente de tres de ellas, que son, sin duda, las más significativas: la teoría del impetus; las modificaciones a la ley aristotélica de la dinámica del movimiento; y el desarrollo de la cinemática.

2. *La teoría del impetus*

La crítica de Philoponus a la explicación aristotélica del movimiento de los proyectiles fue retomada en la Edad Media por Franciscus de Marchia, pero más específicamente por Jean Buridan y sus continuadores, en particular Nicole Oresme. Las investigaciones llevadas a cabo por A. Maier y aceptadas hoy por los historiadores de la ciencia medieval (cf., por ejemplo, A.C. Crombie) no dejan lugar a dudas sobre la independencia de estos últimos con respecto al primero y con respecto a los continuadores árabes de la escuela de Avicena.

a] *Buridan.* Buridan da varias razones contra la teoría aristotélica de la "antiperístasis", basadas todas ellas en la experiencia:

1. Una rueda (un molino, por ejemplo) que continúa girando por un tiempo después de haber sido impulsada. Aquí no puede hablarse, evidentemente, del aire desplazado que vuelve a impulsar por detrás.

2. Una lanza a la cual se le ha dado una forma puntiaguda *en su parte posterior*, no se desplaza más lentamente, cuando es arrojada, que una lanza que no esté aguzada, como sería el caso si la teoría fuera correcta (seguramente el aire que sigue a la lanza no podría empujar un estremo aguzado, porque el aire sería dividido fácilmente por la punta).

3. Un barco que se desplaza en un río, contra la corriente, conti-

núa moviéndose por un tiempo aun después que los remos se han detenido. Y, sin embargo, un marinero sobre el puente no siente el aire que "empuja" el barco, sino el aire que viene de frente y resiste su movimiento.

4. Supongamos que el barco llevara una carga de granos o de madera y que un hombre se situara detrás de la carga. Si el aire tuviera tal ímpetu que pudiera empujar el barco tan fuertemente, el hombre sería apretado violentamente entre la carga y el aire que la empuja por detrás.

5. Un atleta que va a dar un salto, corre cierta distancia para "tomar impulso", pero una vez que está en el aire, no siente que el aire lo empuja, sino el aire enfrente suyo que le ofrece resistencia.

La segunda teoría de Aristóteles es igualmente refutada por Buridan. También la rueda del molino y el barco le sirven de contraejemplos. A éstos agrega otro ejemplo muy claro: "También resulta [de la teoría] que se podría arrojar una pluma más lejos que una piedra, y algo menos pesado más lejos que algo más pesado, suponiendo iguales magnitudes y formas. La experiencia muestra que esto es falso. La consecuencia es evidente puesto que el aire, una vez movido, debería sostener o llevar o mover una pluma más fácilmente que algo más pesado."[4]

A partir de estos argumentos, Buridan concluye que en la piedra, u otro proyectil, el motor imprime (*imprimit*) una cierta "fuerza motiva" (*virtus motiva*) en el proyectil, un cierto *impetus* que actúa en la dirección en la cual el motor movía al cuerpo en movimiento, "sea hacia arriba o hacia abajo, o lateralmente, o circularmente".

El impetus al cual hace referencia Buridan presenta tres propiedades importantes que lo caracterizan de una manera específica con respecto a las teorías precedentes:

a] Cuanto más velozmente mueva el motor al cuerpo, mayor será el impetus que imprima al cuerpo en movimiento.

b] Cuanto más materia tenga el cuerpo que es movido, más intenso es el impetus que recibe.

c] El impetus es algo que tiene una naturaleza permanente (*res nature permanentis*), y sólo es "corrompido" por la resistencia que ofrece el medio.

Las primeras características han conducido a varios historiadores a ver, en el impetus de Buridan, el antecesor de la cantidad de movimiento (producto de la velocidad por la masa) de la física newtoniana. La tercera característica también ha sido asociada con una noción primitiva de inercia. Sin embargo, en la cita arriba transcri-

[4] Jean Buridan: *Cuestiones sobre los ocho libros de la Física de Aristóteles*. El único texto de J. Buridan que hemos podido consultar es el fragmento de la obra mencionada incluido (Doc. 8.2) en la obra de Clagett (*op. cit.*).

ta, Buridan se refiere a un impetus en una "dirección circular", idea que constituirá un serio obstáculo para llegar a la concepción final de la inercia, aun cuando el propio Galileo no tenga ideas claras sobre esto. El ejemplo ideal de movimiento inercial es, en Galileo, un movimiento perfectamente horizontal en toda su trayectoria (es decir: un círculo concéntrico con la superficie del mar).

En todo caso hay evidentemente, en Buridan, una idea, aunque confusa, de la energía asociada al movimiento. Debemos tener en cuenta que conceptos tales como cantidad de movimiento y energía cinética se abren paso muy lentamente en la historia y que las dudas acerca de su definición precisa se mantendrán hasta bien avanzado el siglo XVII, como lo prueba la polémica entre Leibniz y los cartesianos.

A partir de la crítica de las teorías de sus predecesores, Buridan extrae las premisas que le permitirán elaborar su propia concepción sobre la caída de los cuerpos:

a] "la gravedad natural de la piedra permanece siempre la misma antes del movimiento, después del movimiento, y durante el movimiento". Por consiguiente la piedra es igualmente pesada después del movimiento que antes de él;

b] la resistencia del medio (i.e., el aire) permanece igual o es similar durante toda la caída (aquí agrega que no solamente no le parece que el aire cerca de la Tierra sea menos resistente que el aire en los niveles superiores, sino que este último debería ser menos resistente por cuanto es más sutil);

c] si el cuerpo en movimiento es el mismo, el motor (total mover) es el mismo, y la resistencia también es la misma o similar, el movimiento permanecerá con la misma velocidad, puesto que permanecerá igual la proporción entre lo que mueve, el cuerpo movido y la resistencia;

d] pero es un hecho comprobado que durante la caída de un cuerpo pesado la velocidad aumenta continuamente;

e] por consiguiente, debemos concluir que "otra fuerza contribuye al movimiento, además de la gravedad natural que mueve desde el comienzo y que permanece siempre la misma".

"De aquí sigue —dice Buridan— que debemos imaginar que un cuerpo pesado no sólo adquiere movimiento en sí mismo de su principal motor, es decir, su gravedad, sino que también adquiere en sí mismo un cierto impetus con dicho movimiento. Este impetus tiene el poder de mover el cuerpo pesado en conjunción con la gravedad natural permanente, y puesto que dicho impetus es adquirido en común con el movimiento, cuanto más rápido es el movimiento, mayor y más fuerte es el impetus. Así, por consiguiente, desde el comienzo el cuerpo pesado es movido por su gravedad natural solamente; entonces se mueve lentamente. Después es movido por la misma grave-

dad y por el impetus adquirido al mismo tiempo; en consecuencia se mueve más rápido. Y puesto que el movimiento se hace mas rápido, el impetus también se hace mayor y más fuerte, y el cuerpo pesado es movido por su gravedad natural y por el mayor impetus simultáneamente y nuevamente movido más rápido; y así será siempre y continuamente acelerado hasta el final. Y en tanto el impetus se adquiere junto con el movimiento, también disminuye o se torna deficiente junto con el decrecimiento y la deficiencia del movimiento."

Dos observaciones importantes surgen de este texto. En primer lugar, Buridan permanece fiel a la posición griega según la cual la fuerza produce *velocidad* (y no aceleración). De aquí que un aumento de velocidad, como en la caída libre, debe explicarse necesariamente por un aumento de la fuerza. En segundo lugar, el impetus adquiere aquí un estatus ambiguo y el texto se torna difícil de interpretar: por un lado, el impetus es generado, conjuntamente con el movimiento, por el motor del movimiento (la gravedad), y, una vez generado, *produce* más movimiento (mayor velocidad); pero luego parecería que es el movimiento el que parece generar más impetus ("puesto que el movimiento se hace más rápido, por consiguiente también el impetus se hace mayor y más fuerte").

b] *Oresme.* Nicole Oresme es, sin duda, el discípulo más importante de la escuela de Buridan. Ya hemos visto que en *De Caelo* Aristóteles afirma que a medida que desciende un cuerpo que cae libremente, su velocidad aumenta y, por consiguiente, su peso. Es precisamente en el comentario de esta aserción que Oresme expone con claridad su idea del impetus (p. 144). El texto es como sigue:

"Mais yci est a noter premierement que l'isneleté du mouvement de la chose pesante ne crest pas touzjours en descendant, quar se le moien par quoz il est fait estoit plus espés ou plus fort a diviser en bas que en haut, ce pourroit estre tellement que il seroit plus tardif en la fin que au commencement, et tellement que l'isneleté seroit touzjours egualle. Item de ce que il dit que la pesanteur est plus grande de tant comme l'isneleté est plus grande, ce n'est pas a entendre de pesanteur a prendre la pour qualité naturelle qui encline en bas. Quar se une pierre d'une livre descendoit d'une lieue de haut et que le mouvemente fust grandement plus isuel en la fin que au commencement, nientmois la pierre n'avroit plus de pesanteur naturelle pour ce une foys que autre. Mais l'en doit entendre par ceste pesanteur qui crest en descendant *une qualité accidentele laquelle est causee par l'enforcement de l'acressement de l'isneleté*. . . Et cest qualité puet estre appellee impetuosité."

La parte que hemos subrayado en el texto no deja lugar a dudas sobre la idea que tenía Oresme de "impetus", como *producido* por la aceleración del cuerpo. Pero el impetus produce, a su vez, mayor

aceleración. Sobre esta doble característica del impetus de ser, a la vez, efecto y causa, Oresme asentará una demostración de la teoría tradicional según la cual los proyectiles se aceleran al comienzo de su trayectoria.

III. REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS

En un interesante aunque sumamente discutible artículo de Joseph T. Clark, S.J., titulado "La filosofía de la ciencia y la historia de la ciencia" (*Critical problems in the history of science*, ed. por Marshall Clagett, Paper Four), el autor establece la siguiente distinción:

"Hay, en mi opinión, por lo menos dos formas significativamente diferentes, pero básicamente complementarias, de trabajar en la historia de la ciencia. La primera forma la llamo *von unten bis oben geitesgechichtliche Methode*. Con esta expresión designo una política de investigación que prescribe como su punto de partida la más temprana fecha accesible de comienzo del trabajo científico, y establece como meta el intento de reconstruir, con tanto detalle como sea posible, exactamente cómo la ciencia contemporánea de una fecha dada llegó a ser lo que es. En un corte vertical de la historia, esta metodología trabaja de abajo hacia arriba. Está por consiguiente más o menos compelida a organizar sus investigaciones de acuerdo con la estructura de un diseño de divisiones cronológicas normalizadas lógica y sistemáticamente irrelevante, o adoptar —con adaptaciones mínimas— algunas periodizaciones, convencionales pero ajenas, ya establecidas en el campo de la historia general. Otra dificultad de esta metodología *von unten bis oben* es que deja a sus devotos abiertos a la invasión del virus de la precursitis, una afección que difiere principalmente de *bursitis* en que mientras la última causa dolor a la víctima y provoca condolencias en el espectador, la precursitis exalta y emociona a la víctima pero duele al observador."

En su comentario sobre el artículo citado, I.E. Drabkin declara: ". . .tal como yo lo veo, hay dos enfermedades [en los historiadores de la ciencia], y no una: *precursitis* (para usar el término del Padre Clark), la tendencia a ver continuidad donde no existe ninguna, y lo que podríamos llamar *vacuitis*, el no ver continuidad donde sí existe".

Nuestro objetivo, en esta primera parte del presente capítulo, ha sido establecer algunos hitos en el camino que va desde Aristóteles a la mecánica del siglo XVII, procurando no caer en ninguna de las dos enfermedades identificadas por Clark y Drabkin, pero sin preocuparnos tampoco por ellas. Porque en realidad no creemos que la historia de la ciencia se agota con lo que Clark llama las dos formas complementarias en que se puede trabajar en este campo. Estamos más de

acuerdo con la expresión de E.J. Dijksterbuis según el cual "la historia de la ciencia constituye no sólo la memoria de la ciencia, sino también su laboratorio epistemológico" ("The origins of classical mechanics from Aristotle to Newton", Paper Five, en la misma colección editada por Clagett). Y es sólo en tanto "memoria" que la historia de la ciencia puede analizarse "von unter bis oben" o "von oben bis unter" en la terminología de Clark, porque en cuanto se la visualiza como "laboratorio de epistemología" son otras las consideraciones que deben de entrar en juego. Las secciones precedentes han ido señalando algunos de los problemas más relevantes a nuestro juicio. Aquí nuestra posición diverge también un tanto de la de Dijksterbuis en el alcance del análisis epistemológico que creemos necesario realizar.

Hacia el final del magnífico artículo que hemos citado, Dijksterbuis hace una clara y acertada referencia al hecho de que el desarrollo de la mecánica clásica y, en particular, de la teoría newtoniana de la gravitación, es uno de los mejores ejemplos históricos para mostrar cómo "toda solución de un problema científico hace surgir nuevas cuestiones, que en parte son, de nuevo, de naturaleza científica, pero en parte también de naturaleza epistemológica". Para ilustrar este aserto, da los siguientes ejemplos:

"El niño repite en la escuela, sin pensar en lo que dice, lo que le dice su maestra: la piedra cae porque la Tierra la atrae. Pero, ¿qué es esta atracción y cómo ocurre? ¿Podemos también decir que la piedra tiende hacia la Tierra, o que es impelida hacia ella? Cuando el alumno avanza un poco más, aprende a decir que todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea compelido a cambiar dicho estado debido a fuerzas que operan sobre él. Pero, ¿en relación con qué marco de referencia se aplica este enunciado? ¿En relación con el espacio absoluto? Si es así, ¿qué es espacio absoluto y cómo podemos establecer un movimiento absoluto? Finalmente el estudiante toma conocimiento del principio general de gravitación, y así aprende a explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol, el de la Luna alrededor de la Tierra, las mareas, y el movimiento de los cuerpos que caen a la Tierra. Pero, ¿qué significa aquí 'explicar'? ¿En qué medida lo que es enunciado como explicación satisface el deseo del hombre de buscar relaciones causales? ¿Es esta forma de comprender, algo más que una descripción en términos matemáticos? Si es así, ¿qué es ese 'algo más'? Y si no es así, ¿tendremos que concluir que entender una cosa no es más que subsumirla bajo una noción general con la cual nos hemos familiarizado?"

Este tipo de problemática corresponde a la polémica que mantuvieron los newtonianos en dos frentes distintos, contra cartesianos y leibnizianos. Aquí nos interesa solamente poner de manifiesto que

desde el punto de vista de la historia de la ciencia el planteo epistemológico expresado por Dijksterbuis presenta aún limitaciones frente a las cuales el análisis se torna insuficiente y poco fecundo. El análisis histórico adquiere, en cambio, una dimensión distinta cuando se abandonan las preguntas *directas* que formula Dijksterbuis (¿qué es lo que conocemos?, ¿qué es lo que explicamos?) y se retoma la formulación que ha hecho la epistemología genética hace más de 50 años. Tal como lo indicamos en la introducción, la clave de la interpretación de la evolución histórica de una ciencia reside en *cómo* se pasa de una etapa a otra, es decir: cuáles son los *mecanismos* de tipo cognoscitivo que entran en juego en cada etapa y cuáles producen el rebasamiento de dicha etapa para llegar al nivel superior.

En esto consiste precisamente el objetivo de estas conclusiones preliminares. Nuestro punto de partida será un hecho ya mencionado, puesto de manifiesto por los historiadores en las últimas décadas (Maier, Clagett, Crombie y otros): en plena Edad Media, por los menos a partir del siglo XII, cuando la física de Aristóteles era el sistema de referencia en todos los estudios sobre la dinámica del movimiento, el desarrollo de la metodología de la ciencia había llegado a niveles sorprendentes aun con respecto a la filosofía de la ciencia que domina hoy en el mundo occidental. Las razones por las cuales *el contenido* de la teoría aristotélica del movimiento —así como de las que sustentan sus continuadores medievales— difiere de las ideas que sustentarían Galileo, Descartes, Huygens y Newton no deben buscarse, por consiguiente, allí donde las ubicaron los textos tradicionales de historia de la mecánica. El larguísimo camino que va de Aristóteles al siglo XVII no estuvo determinado por las dificultades que hubieran tenido los actores de ese lento proceso en convencerse de las bondades de la experimentación o de la fecundidad del método hipotético-deductivo. Como ya hemos visto, no es mucho lo que hay que agregar a lo ya dicho sobre estos temas en el siglo XIII.

Este hecho nos conduce a una tesis de carácter general sobre la cual volveremos repetidas veces. No son las consideraciones *metodológicas* las que abren camino a la ciencia, sino ciertas pautas de carácter *epistémico,* que condicionan las modalidades de las grandes etapas en la historia de cada ciencia particular, así como el pasaje de una a otra etapa. No debemos buscar, entonces, cuál fue el desarrollo de un *método adecuado* para encarar una teoría del movimiento que llegara a satisfacer los caminos modernos de una teoría científica (el camino "von oben bis unten" de Clark). Debemos buscar cuáles fueron los *fundamentos epistémicos* en la *aplicación* de una metodología dada y cuál fue la evolución que condujo a aquellos *presupuestos epistemológicos* sobre la base de los cuales se terminó por *aceptar* una teoría dada como *científicamente satisfactoria,* a partir del siglo XVII.

Coincidimos, pues, con Dijksterbuis en la necesidad de un análisis epistemológico en la determinación de las etapas históricas de la ciencia, pero creemos que es esencial establecer una distinción entre los aspectos metodológicos y la base epistémica. A este respecto, los problemas que hemos ido señalando en el texto han girado alrededor de ciertas cuestiones fundamentales:

a] El tipo de preguntas que se intenta contestar con una teoría dada.

b] El tipo de premisas no demostradas que se aceptan en forma implícita o explícita.

c] El tipo de relación entre la experiencia y la teoría.

d] El papel de las matemáticas en la formulación de una teoría física.

Repitamos, a riesgo de ser redundantes, que estas preguntas *no son* (o no son solamente) de tipo metodológico. Aun después de haber elaborado una metodología adecuada (es decir, después que se acepta la necesidad de la experiencia para obtener, por "inducción", leyes generales —¡regularidades!—, después que se admite la necesidad del método hipotético-deductivo y de la observación empírica para verificar las consecuencias deductivas de una teoría, etc.) las cuestiones que hemos indicado se seguirán planteando. Las respuestas a dichas cuestiones no deben buscarse, por consiguiente, en términos de normas metodológicas. Las respuestas se obtendrán una vez que la investigación histórica haya puesto de manifiesto las presuposiciones epistémicas que caracterizan cada etapa del desarrollo, así como los mecanismos cognoscitivos que están en juego.

Desde este punto de vista, creemos que el desarrollo de la mecánica desde los griegos hasta el siglo XVII está caracterizado por tres formas específicas de "transición". Es sobre la base de estas formas de transición que se puede definir, de manera precisa, la revolución que tuvo lugar en el siglo XVII como resultado de un *cambio de marco epistémico*.

1. *El pasaje de seudoimposibilidades a la necesidad lógica y causal*

El razonamiento de Aristóteles al cual hicimos . ferencia en la sección, III. 1 es de un rigor lógico que obliga a aceptar las conclusiones una vez aceptadas las premisas. Dichas premisas son presentadas por Aristóteles como *necesarias*, aunque indemostrables. ¿De dónde proviene esa necesidad? El razonamiento aristotélico corresponde, como veremos en la parte II de este capítulo, a la etapa que psicogenéticamente está caracterizada por el predominio de las seudoimposibilidades y de las seudonecesidades. Se trata de una "seudonecesidad" que tiene diversas fuentes: en algunos casos proviene de la aceptación de lo que existe como si debiera ser necesariamente así; en otros casos es-

tá impuesta por una concepción del mundo vinculada a concepciones religiosas.

En el primer caso, las dos marcas distintivas de la seudonecesidad encontradas en el análisis psicogenético surgen claramente a través de la argumentación: la confusión entre lo que es general y lo que es necesario, por una parte, y la indiferenciación entre lo que es fáctico y lo que es normativo, por la otra. Hay un "debe ser así" que impone limitaciones estrictas a lo que se torna aceptable en tanto se considere posible. Tales limitaciones permanecieron durante siglos constituyendo barreras imposibles de franquear en el desarrollo del pensamiento científico.

De aquí que sea erróneo acusar a Aristóteles de "no observar" la naturaleza, así como pensar que es la observación de la naturaleza lo que caracteriza primordialmente la revolución científica del siglo XVII. No es de la empiria de donde surgirá la ciencia moderna. Aristóteles era empirista. Sus "errores" como físico no se deben a una manifiesta incapacidad para observar o a un rechazo de la observación empírica, sino a las presuposiciones epistemológicas que introduce en sus "lecturas" de la experiencia y, por consiguiente, al uso que hace de la observación.

Veamos cómo actúan estas "prohibiciones" impuestas por el juego de la "seudoimposibilidad" y la "seudonecesidad". Los cuerpos abandonados a sí mismos a cierta distancia de la superficie de la Tierra, suben o bajan. La tierra y el agua bajan; el aire y el fuego suben. Una mezcla de varios elementos, tendrá el movimiento del elemento que predomine (puesto que no se observa un cuerpo que quede suspendido e inmóvil). De esta *observación general* surge una *premisa* también general: es imposible que un cuerpo pueda tener más de un movimiento simple a la vez. De esta premisa —fundada, repetimos, en la observación— se *deducirá* cuál es el movimiento de un proyectil arrojado horizontalmente: primero predominará el movimiento violento y el proyectil seguirá desplazándose horizontalmente hasta detenerse. Luego actuará el movimiento natural y el cuerpo comenzará a caer. Esta concepción perdurará aún con modificaciones hasta el siglo XVI. En el siglo XIV Albert de Saxe, siguiendo la teoría del impetus de Buridan, modifica un tanto la explicación: hay un primer momento en el cual el impetus "vence" al peso y el cuerpo se desplaza horizontalmente; cuando el impetus comienza a agotarse, el peso empieza a vencer al impetus y la trayectoria se curva hacia abajo; finalmente, agotado el impetus, el cuerpo cae verticalmente. Pese a esta consideración de breves intervalos de "lucha" entre dos fuerzas, tan fuerte es esta "imposibilidad" de que haya "composición" de fuerzas que el propio Oresme, en sus comentarios sobre *De Caelo,* se ve obligado a hacer una extensa disquisición para eliminar aun la posibilidad de "compensación".

La importancia de las "seudoimposibilidades" imponiendo limitaciones al desarrollo de hipótesis y al avance de las teorías científicas no puede ser exagerada. La historia de la mecánica desde Aristóteles hasta Newton puede muy bien ser expuesta como una historia de la eliminación de seudonecesidades. El episodio más dramático y mejor conocido es el protagonizado por Kepler para librarse de la necesidad atribuida al movimiento circular de los planetas, hasta llegar a la elipse. El propio Galileo está atrapado en esta exigencia del movimiento circular de los planetas como el movimiento simple más perfecto.

2. *El pasaje de atributos a relaciones*

El segundo aspecto que hay que considerar es la introducción de mediciones allí donde sólo se hacía referencia a cualidades. Pero medir es comparar, establecer relaciones. Remplazar una discusión acerca de las propiedades características de un cuerpo por una discusión acerca de sus relaciones con otros cuerpos, significa modificar el tipo de pregunta que uno se propone responder para "explicar" el movimiento. Significa, asimismo, relativizar conceptos que aparecían como absolutos. Tomemos el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado. Aristóteles y sus seguidores medievales se preguntan acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y de la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. Galileo eliminará tales preguntas y sólo se preocupará por comparar distancias y tiempos de caída. Newton reducirá el problema a una relación en el sistema Tierra-piedra y, en una síntesis genial, mostrará que es el mismo tipo de relación que el sistema Sol-Tierra. Para ello tendrá también que eliminar otra de las limitaciones impuestas por Aristóteles: la "necesidad" de que el universo que está más allá de la Luna sea perfecto e incorruptible y responda, por consiguiente, a otras leyes que las del mundo sublunar. Las propiedades absolutas de los cuerpos se diluirán en un sistema de relaciones donde sólo se hará referencia, en última instancia, a intervalos de tiempo y a longitudes. Este pasaje de atributos a relaciones y esta consiguiente relativización no es privativa de la revolución científica del siglo XVII; presidirá todas las grandes revoluciones que sufrió la mecánica. También la longitud y el intervalo de tiempo, propiedades absolutas para la mecánica newtoniana, serán relativizados por Einstein. Ambas entrarán, no como atributos, sino como relaciones en un sistema más amplio que incluirá el marco de referencia del "observador". Pero estas propiedades de nivel superior sufrirán a su vez el mismo proceso histórico, porque aun la velocidad relativista de una partícula perderá su sentido absoluto para pasar en la mecánica cuántica —por lo menos en la "versión" de N. Bohr—, a ser una propiedad definida en función de una relación en el sistema partícula-instrumento de medida. Desarrollaremos con más detalle

este mecanismo en la evolución conceptual de la física en el capítulo IV. Aquí sólo nos interesa poner de manifiesto el enorme esfuerzo intelectual requerido por cada uno de esos "saltos" que significó nada menos que la sustitución de propiedades casi "tangibles" por un sistema abstracto de relaciones. Históricamente, el punto culminante de ese proceso aparece en una de las frases más célebres de Galileo: "Yo pretendo que no existe en los cuerpos exteriores nada que pueda estimular en nuestros gustos, olores y sonidos, más que dimensiones, formas, multitudes y movimientos lentos o rápidos" (Il saggiatore Question 48).

3. *Transición de una "explicación física" en términos de causas últimas y causas concurrentes, a la concepción de una dinámica que sólo establece dependencias funcionales*

Si bien este aspecto del problema está estrechamente relacionado con el punto anterior, no es en modo alguno una consecuencia inmediata de él. El pasaje de atributos a relaciones, señalado precedentemente, implica, claro está, una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero aquí no se trata simplemente de mediciones, sino de introducir el concepto de función y la relación funcional entre las variables que caracterizan el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria. Esto supone, en primer lugar, la introducción del *tiempo* como variable independiente, lo cual fue hecho por primera vez, en forma explícita, por Galileo y significó uno de los avances más importantes en la construcción de lo que luego sería la mecánica newtoniana.

En segundo lugar, la nueva mecánica, al definir la fuerza como una función del espacio y el tiempo como variables independientes, así como de parámetros que tienen valores constantes para cada cuerpo, va a introducir la modificación más profunda en la problemática que se planteaba la ciencia del movimiento. Esta vez el mérito corresponde a Newton. Su aporte más genial, además de la síntesis de la mecánica de los cuerpos celestes y sublunares, a la cual ya nos hemos referido, fue concebir los problemas de la dinámica como el tipo de problemas que luego se denominarán en la física "problemas con condiciones iniciales": los valores de los parámetros de un sistema en un momento dado y en un lugar dado (es decir, las llamadas "condiciones iniciales") determinan la evolución ulterior del sistema. El objetivo de la mecánica es *calcular* dicha evolución sin plantearse otras preguntas sobre las "causas reales" del movimiento. Pero la evolución misma se calcula sobre la base de un *sistema de transformaciones* que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren en cualquier otro instante. Esta

transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares más sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos.

CAPÍTULO II
PSICOGÉNESIS Y FÍSICA PRENEWTONIANA

Como ya dijimos en nuestra introducción, las analogías que estamos buscando entre la psicogénesis y su desarrollo en el curso de la historia de las ciencias pueden ser de dos tipos. Nuestro problema general consiste en poner de manifiesto los mecanismos funcionales comunes que aseguran el pasaje de un nivel de conocimientos al siguiente, independientemente del valor absoluto de estos conocimientos, puesto que se trata de procesos formadores que intervienen en toda nueva construcción cognoscitiva. Sin embargo, algunas veces es posible poner en evidencia, además, ciertas analogías de contenidos que se refieren a los conceptos utilizados para comprender y señalar los fenómenos.

Después que una disciplina ha sido constituida bajo una forma científica, como es el caso de la física a partir de Newton, está claro que no es ya cuestión de buscar tales parentescos de contenidos entre estos conceptos y los que se elaboran en el curso de la psicogénesis, puesto que estos últimos a pesar del papel innecesario que desempeñan, de una manera que podríamos llamar embriogenética, no tienen todavía ninguna de las características teóricas del pensamiento científico. Por el contrario, las concepciones de naturaleza precientífica se suceden a partir de Aristóteles hasta el período newtoniano y se prestan a justificar (hasta cierto punto, y precisamente a causa de su carácter precientífico) las comparaciones instructivas con las construcciones cognoscitivas propias de la psicogénesis.

Comenzaremos pues este capítulo efectuando comparaciones de contenido, ya que, excepcionalmente, son posibles en este caso particular, y buscaremos de inmediato cómo analizar ciertos mecanismos comunes que vinculan lo que hayamos visto de este período precientífico de la física con los procesos inherentes a la psicogénesis. En efecto, esta investigación de los mecanismos comunes no se referirá, en este caso, sino a: *a*] el mecanismo de las seudonecesidades,[1] *b*] la sucesión de las centraciones sobre los predicados, las relaciones y las transformaciones. Se agregará a esto *c*] un ensayo de interpretación psicogenética de las curiosas relaciones analizadas más arriba entre una metodología que llegó a tener un grado sorprendente de preci-

[1] J. Piaget, "Le possible, l'impossible et le nécessaire", *Archives de psychologie, 44*, 1976, núm. 172, pp. 281-299; J. Piaget, "Essai sur la nécessité", *Archives de psychologie, 45*, 1977, núm. 175, pp. 235-251.

sión en el siglo XIII y la pobreza relativa de los resultados epistémicos propios del mismo período.

I. LA PSICOGÉNESIS DEL IMPETUS

1. *Observaciones preliminares*

En forma muy esquemática, y despreciando las aceleraciones y las regresiones que se hayan podido producir, podemos distinguir en la historia del impetus cuatro grandes períodos que marcan su evolución: *a*] Un período inicial caracterizado por la teoría aristotélica de dos motores, que admite, además de la causa exterior del movimiento, una fuerza endogéna del móvil; *b*] un segundo período en el cual el motor interno no es ya invocado en el sentido precedente y donde la sola causa del movimiento es una fuerza motriz global sin la distinción de lo que va a devenir, en el período siguiente, en una transición de la fuerza al impetus; *c*] viene luego un período en el cual el impetus resulta de la fuerza y produce el movimiento, ocupando así una posición causal intermediaria y necesaria; *d*] finalmente el impetus es el resultado del movimiento causado por la fuerza y tiende así a traducirse, tarde o temprano, en una aceleración.

A su vez, reencontramos un equivalente de estos cuatro períodos en el curso de la psicogénesis. Lo más sorprendente es que el niño adquiere espontáneamente una idea original que recuerda al impetus utilizando el mismo término de *élan* tomado del vocabulario del adulto, pero con significaciones que en modo alguno están dictadas por este último. Una convergencia tal corre el riesgo de ser tachada de imaginaria, y su verdad de ser considerada como poco verosímil.

Importa por consiguiente tratar de mostrar desde el principio, si es que logramos justificarla, que es lo que significaría de manera bastante natural. Va de suyo que no se trata aquí en modo alguno de invocar un paralelismo ontofilogenético en el sentido de Haeckel, y esto por tres razones que juzgamos evidentes: *a*] no se conoce ningún ejemplo de transmisión hereditaria de las ideas; *b*] no hay filiación hereditaria entre Aristóteles o Buridan, por ejemplo, y los niños ginebrinos o polacos que han servido de sujetos; *c*] pero, sobre todo, el niño es anterior a todos los adultos de la historia. Dicho esto, es necesario destacar que si puede haber convergencia entre teorías que pertenecen al pasado de la ciencia y ciertas construcciones que se pueden seguir fácilmente en el plano de la psicogénesis, se trata sin embargo de una correspondencia entre productos cognoscitivos que se sitúan naturalmente a niveles jerárquicos del pensamiento profundamente diferentes: el teórico se formula problemas y, para resolverlos, apela a nociones, inferencias u operaciones más o menos cla-

ramente "tematizadas", es decir operaciones que se han vuelto objeto de pensamiento, y de un pensamiento manifiestamente reflexivo puesto que hay investigación teórica (lo cual no le impide utilizar a título instrumental procesos operatorios que todavía no están tematizados pero que lo serán por los continuadores). Además, su reflexión depende constantemente de trabajos anteriores, admitidos como válidos aunque se intente corregirlos o sobrepasarlos. El niño, por el contrario, no se formula en general las preguntas que nosotros le presentamos y si ha podido hacerlo es sólo momentáneamente y sin que tenga alcances reflexivos (las teorías en sentido estricto no comienzan sino en la adolescencia). Sus respuestas a nuestros problemas son por consiguiente resultado de un esfuerzo de toma de conciencia en la dirección de las interpretaciones implícitas que el sujeto se ha dado en el curso de sus acciones. Pero estas interpretaciones existen, puesto que para producir, prever o explicar movimientos es necesario estructurar sus diversos aspectos y conferirles significaciones. Por muy prácticas o utilitarias que sean estas últimas, en muchos casos son conceptualizadas, como lo prueba el empleo espontáneo por los niños de siete u ocho años de la noción de *élan* no obstante que esta noción no es invocada antes sino de manera muy excepcional.

La comparación entre la historia del impetus y su psicogénesis consiste pues en una puesta en correspondencia entre dos desarrollos situados en planos extremadamente diferentes, pero cuyas relaciones se tornan inteligibles si nos referimos a una ley fundamental de las construcciones cognoscitivas: se trata, como ya lo hemos dicho en nuestra introducción, de que no se suceden linealmente, sino que dan lugar, etapa por etapa, a reconstrucciones de lo que precede con integración en lo que ha de seguir. De aquí resulta que las ideas construidas en un nivel superior del pensamiento, aun cuando se trate de las ideas de un teórico, se apoyan necesariamente en una subestructura de acciones de las cuales extraen su sustancia ampliándolas en diversos grados. De la misma manera que una axiomática categórica, forma contemporánea extrema de la reflexión, trabaja sobre un contenido intuitivo que trata de reconstruir, formalizándolo, así también toda reflexión procede por reorganización de contenidos de niveles inferiores, remontándolos, según los casos, hasta los esquemas de acción. En este sentido, todo lo que tiene relación con el movimiento y la fuerza, incluido en particular el *élan* del cual hablan los niños (en función de su propia velocidad o de la velocidad de los vehículos o móviles que ellos pueden utilizar) da lugar a la formación de esquemas que constituyen la subestructura del pensamiento en relación con estas nociones. Hay por consiguiente allí un punto de partida común a todos los sujetos, cualquiera que sea su nivel intelectual, y no hay entonces nada de inverosímil en encontrar correspondencias entre los desarrollos de estos esquemas y el de las ideas reflexivas co-

rrespondientes, aun si éstas rebasan muy ampliamente a aquéllas. Éste es pues el caso, ya que como hemos visto en nuestra introducción, la reconstrucción nivel por nivel conduce siempre a construcciones nuevas por extensión de los contenidos y enriquecimiento de las estructuras. Pero estas novedades son, a su vez, producto de mecanismos que se repiten funcionalmente. Si nuestras hipótesis son exactas, lo que ocurre en el plano superior de la historia científica del impetus no resulta de una simple transposición, en lenguaje de teorías reflexivas, de lo que ha sido elaborado en los niveles elementales. Se trata, por el contrario, de un mecanismo análogo de formación que vincula entre sí las cuatro etapas de las interpretaciones reflexivas del movimiento, como ha vinculado en los estadios inferiores los cuatro niveles de la interpretación del movimiento y de sus causas, tales como fueron concebidas desde la infancia.

Por el contrario, lo que sí resulta soprendente y pudiera constituir un problema constante a menos que se esté bien informado sobre su naturaleza, son las dificultades de la toma de conciencia. Por ejemplo, ¿por qué el papel central de la aceleración no ha sido desentrañado sino muy laboriosamente, si todos tienen la experiencia del movimiento de su propio cuerpo y todo esfuerzo es la manifestación de tal aceleración y no simplemente (como creía Maine de Biran) de una fuerza en cierta forma absoluta y que no dependería más que de la voluntad del sujeto o de los poderes del organismo (fuente evidente del "motor interno" de Aristóteles)? O bien, en un dominio completamente diferente, ¿por qué la lógica de Aristóteles, nacida de una reflexión sobre los razonamientos cotidianos, no ha tomado conciencia de las estructuras de relaciones, de utilización tan corriente como las imbricaciones silogísticas? Podríamos citar muchísimos otros ejemplos mostrando que puede haber un retardo, muy considerable a veces, entre la construcción reflexiva de una noción y su empleo ya efectivo y a veces sistemático en los niveles inferiores de los esquemas de acción o de las subestructuras ya representativas pero no tematizadas (ni todavía tematizables). Es por consiguiente muy natural y explicable encontrar correspondencias entre las construcciones de la psicogénesis que subsisten en todo sujeto normal, subyacente en las formas superiores de su pensamiento, y las etapas de la historia.

2. *El nivel inicial*

En lo que respecta a la historia, parece claro que en lo concerniente a la teoría aristotélica de los dos motores, las principales cuestiones se refieren al papel de un motor interno, concebido como necesario aun en el caso de móviles no vivientes, y a la necesidad de contacto continuo con el motor externo en los casos en que la conservación del movimiento imprimido parecería que debería ser suficiente.

Con respecto al primer punto, la comparación con la psicogénesis parece clarificadora cuando se muestra el carácter tardío de la diferenciación entre los seres vivientes y los elementos no organizados. Desde este punto de vista la generalidad del motor interno va de suyo y debe ponerse en relación con la generalidad del finalismo que los modernos reservan al dominio biológico confiriéndole un estatus causal elaborado a partir de las regulaciones teleonómicas, mientras que Aristóteles asociaba todavía todo movimiento a un objetivo biomórfico como es el caso en los niveles elementales del pensamiento. En los niños, la hipótesis de este motor interno va tan lejos que los muy pequeños interpretan el viento como si estuviera poducido por los árboles que se balancean a sí mismos, por las ondas que se levantan, o por el movimiento de las nubes que avanzan espontáneamente, lo que favorece naturalmente la formación del esquema de la antiperístasis sobre la cual habremos de volver.

En cuanto a la necesidad de un contacto permanente del motor externo con el móvil, las dos razones que son determinantes en la teoría de Aristóteles desempeñan ya un papel incipiente en la psicogénesis. La principal es, como hemos visto, el rechazo de todo movimiento inercial, tanto más curioso en el estagirita, quien muestra por un razonamiento muy correcto su necesidad en el vacío, pero para concluir que se trata de una doble absurdidad del vacío y de la inercia misma. La segunda razón es la teoría del lugar propio, o natural, según la cual un proyectil no acompañado de una fuerza debería caer verticalmente al suelo una vez separado de quien lo ha proyectado (y esta caída es concebida como si tuviera lugar al término de una trayectoria que en un comienzo es horizontal tanto para Aristóteles como para los niños pequeños).[2]

En este sentido, las dos razones apuntadas se encuentran más o menos explícitamente formuladas por los niños y dan lugar (lo que es mucho más notable) a una perístasis frecuente y bastante sistemática. En lo que concierne a la ausencia del concepto de inercia, va de suyo que un movimiento rectilíneo es considerado como obligado a detenerse en razón de un frenamiento o simplemente de la pérdida del *élan*, por fatiga del móvil. Pero cuando se trata de un movimiento continuo y aparentemente sin empuje inicial, como en el caso de las nubes, el sujeto dirá con frecuencia que la nube es arrastrada por el viento, que ella misma ha comenzado por provocar débilmente gracias a un pequeño desplazamiento: de allí surge una reacción del medio que adquiere un poder más o menos grande. En el caso de la fuerza centrífuga (otra forma de la inercia) los sujetos pequeños dirán que un sólido o un líquido no caen cuando están en la cúspide de la trayectoria circular del recipiente puesto que este último "hace

[2] J. Piaget, *La causalité physique chez l'enfant*, París, F. Alcan, 1927.

aire" al dar vueltas y este aire empuja y retiene a la vez los cuerpos que pesan en el fondo del recipiente. Hay muchos otros ejemplos que muestran la idea de un empuje del aire que retorna y que podrían ser citados en situaciones totalmente inesperadas. No puede resultar por consiguiente artificial que se interrogue a los niños sobre la cuestión de los proyectiles: ¿por qué una piedra no cae inmediatamente después que uno la suelta? Los pequeños no ven ningún problema en esta pregunta puesto que ellos dicen que si uno la lanza fuerte ella está hecha para tales movimientos (motor interno), y los ha de seguir, pero inmediatamente después invocarán el empuje del aire con las dos fuentes que indica Aristóteles: el aire desplazado por el movimiento de quien ha hecho el lanzamiento, y la corriente producida por el móvil que va a volver para empujarlo desde atrás.

En lo que respecta al lugar propio, parece evidente que el de las piedras es el suelo y el del humo está "en el aire", sin relatividad de los pesos entre sí. Resulta extremadamente interesante citar a este respecto algunas respuestas espontáneas de los niños: un sujeto de ocho años y siete meses dijo en una oportunidad,[3] sin que se le pidieran las razones del descenso de una bolita: "Si uno la pone aquí (punto de partida) tiene que tener un lugar de llegada a donde va siempre; tiene que tener su lugar natural." Hay que convenir que es imposible ser más peripatético en cuanto a la caída de los pesos.

3. *Segunda etapa*

La segunda etapa está caracterizada por la desaparición del motor interno, lo cual confiere entonces al motor externo un cierto número de poderes pero aún no diferenciados y que engloban de esta manera todos los aspectos que serán distinguidos en lo que sigue bajo nombres variables correspondientes a la fuerza del agente, al impulso recibido, a las velocidades, a los espacios recorridos y a las masas (cuando se trata de golpes o de resistencias). Tal tipo de noción polivalente recuerda la magnitud "acción" de los físicos. Es bien sabido que Newton no escribía su primera ley según la ecuación $f = ma$ (la cual se debe a Euler), sino que la expresaba en una forma que más bien correspondería a la expresión $f = \frac{d}{dt}(mv)$, que se refiere a la acción. Pero como se trata entonces de variables métricas bien diferenciadas, y con variaciones infinitesimales, mientras que la acción primitiva de la cual hablamos aquí no es descomponible sino en conceptos cualitativos, y no es en realidad descompuesta puesto que permanece indiferenciada, la llamaremos "acción global" y la escribiremos bajo la fórmula *mve*.

[3] J. Piaget y colab., *La transmission des mouvements*, París, PUF, 1972, EEG 27.

Dicho esto, la situación experimental donde se distinguen mejor los caracteres de esta segunda etapa en la cual el impetus no está diferenciado de la fuerza exterior o móvil (por oposición a la tercera etapa donde estarán disociadas estas fuerzas), el impetus que resulta, y el movimiento adquirido gracias a él, es la transmisión a través de intermediarios inmóviles. Hay a este respecto una experiencia sumamente interesante que corresponde a situaciones diversas de choques de bolitas.[4] En un caso una bolita golpea contra un bloque de madera y hace partir otra bolita situada en el otro extremo de dicho bloque. En el otro caso se trata de una fila de bolitas móviles; una bolita golpea la primera de la fila; todas quedan inmóviles menos la última, que parte. En las explicaciones que dan los niños podemos distinguir diversas fases. En una primera fase los sujetos hacen intervenir el motor interno: cuando la bolita activa golpea el bloque de madera, éste permanece inmóvil, pero la bolita situada en el otro lado parte por sí misma por una especie de contagio y con su propia fuerza; en el caso de la fila de bolitas, la bolita activa pasa por detrás de las otras sin que uno la vea y viene a empujar a la primera; se coloca en su lugar después de la partida o vuelve a su sitio anterior. En la tercera fase el sujeto dirá que la bolita activa, gracias a su fuerza, ha dado un impulso que pasa "a través" de los intermediarios y que provoca el movimiento de la bolita pasiva. Pero entre estas dos fases, es decir en el curso del período II, el motor interno es eliminado, el impetus intermediario no es ya diferenciado, y la bolita activa es entonces la fuente de "una acción global" que se presenta de la manera siguiente:

a] Hay en primer lugar un empuje $p = mv$ que depende de su velocidad v y de su peso m; *b*] este movimiento v se transfiere al objeto que ha sido golpeado (el bloque de madera o la primera bolita pasiva); pero *c*] este último tiene también un peso m' que resiste a su vez y del cual proviene la retención de la bolita activa. Notemos a este respecto que en este caso esta resistencia se considera que debe ser sustraída de la acción de la bolita motora, como en el caso de Philoponus, y que aquí no hay cuestiones de proporcionalidad. Sigue luego *d*], situación en la cual el objeto que ha sido golpeado recibe el empuje y debe avanzar de tal manera que este empuje $p = mv$ es indisociable del camino recorrido e en el seno de la acción global mve. Lo importante es que todo esto es contrario a los observables, puesto que tanto el bloque de madera como las bolitas pasivas intermediarias permanecen inmóviles. Pero el complejo mve es tan resistente en su carácter indiferenciado que el sujeto cree "ver" moverse a los intermediarios, que en realidad permanecen en su lugar. Si se le pide al niño que apriete fuertemente con sus dedos sobre el bloque de madera para mantenerlo inmóvil, seguirá afirmando que ha "sentido" una

[4] *Ibid.*

traslación. Finalmente *e*], este empuje con desplazamiento supuesto se repite de un móvil al siguiente hasta la última bolita pasiva que parte sola, puesto que ya nada resiste su movimiento.

Se ve así que la "acción global" *mve* llega a la imposibilidad de las transmisiones mediatas; estas últimas quedan pues remplazadas por una sucesión de transmisiones inmediatas, con traslados supuestos de una bolita a la próxima.

4. *La tercera etapa*

La interpretación que corresponde a la fase III, es completamente diferente. Aquí se invoca un "impulso" como intermediario entre el empuje de la bolita activa y el movimiento de la última bolita pasiva, y se trata de un impulso que no es una simple noción verbal puesto que representa una propiedad nueva y fundamental de "atravesar" el bloque de madera o las bolitas pasivas hasta la última.

Sin duda los sujetos de este nivel admiten todavía que los intermediarios deben desplazarse un poco para transmitir el impulso recibido, de tal manera que la transmisión que se ha tornado mediata no es todavía sino semiinterna, pero el hecho esencial es que a partir de la acción de la bolita activa, y luego de cada una a la siguiente, el empuje no provoca causalmente un movimiento del móvil pasivo sino con la condición *sine qua non* de que le dé un impulso. Este último es pues el intermediario causal necesario entre el empuje y el movimiento adquirido y, en este sentido, se pueden comparar estas explicaciones con las de Buridan, para quien el impetus es el intermediario indispensable entre la fuerza del motor externo y las traslaciones que surgen de este impulso. La analogía va aún más lejos y se puede encontrar incluso en la idea de una acción acumulativa posible de impetus sumados. En efecto, Buridan interpretaba los casos observados de aceleraciones admitiendo que si la fuerza exterior continúa ejerciéndose, los impetus sucesivos se agregan unos a otros. Pues bien, en el caso de la fila de bolitas, donde no hay ninguna aceleración, los sujetos de este período III admiten a menudo que cada impulso transmitido de una bolita a la siguiente se suma a los precedentes, de tal suerte que la última bolita se beneficia de un impulso total superior al que recibe la primera de las bolitas pasivas.

Veamos algunos ejemplos. AUG, de 8 años, dice que la bolita activa da un impulso que se transmite de una bolita a otra, y piensa inicialmente en un efecto acumulativo ("y empuja cada vez más rápido a las otras"); luego cambia su idea por una igualación entre los impulsos iniciales y finales (hay "lo mismo" de *élan*); finalmente, duda acerca de lo que ocurriría si se alargara la fila, pero aumentando por ese mismo hecho las resistencias: con más bolitas "se ayuda a la fuerza" o, inversamente, "va menos rápido". DAN, de 8 años 4 meses,

también dice que la bolita activa "dio su *élan*" a la primera, la cual "dio el *élan* directamente a la segunda", y así sucesivamente, y concluye que el *élan* "da una corriente". PER, de 7 años 8 meses, habla de "sacudidas" que dan cada vez más fuerza hasta empujar la última (efecto acumulativo), pero esta fuerza "entra en el corazón de la bolita, y atraviesa ésta, después ésta, después. . ." (y así sucesivamente, de una en otra). WEB, de ocho años 4 meses, prevé que "el *élan* va a atravesar las bolitas", pero luego vuelve a una explicación por antiperístasis. RIC, de la misma edad, cree que el impulso dado se debilitará con las resistencias, pero luego de comprobar el efecto, piensa que permanece constante.

Se ve la generalidad de esta noción de un intermediario necesario entre el motor externo y el movimiento de los móviles pasivos en una serie de ejemplos que provienen de experiencias con niños. Notemos además que si algunos de estos sujetos creen, como Buridan, que los ímpetus aumentan en caso de aceleración o disminuyen debido a resistencias, otros piensan, como Oresme, que pueden decrecer en virtud de una especie de "gasto" (comparable en lenguaje moderno al trabajo utilizado). Por ejemplo MON, de doce años y ocho meses, dice, al comparar la primera y la última de las bolitas pasivas: reciben "el mismo impulso, puede ser un poco menos (al final) porque las otras se guardan (retienen) un poco de impulso con la sacudida".

5. *El cuarto nivel*

Mientras que el impulso constituye durante la fase III la causa del movimiento y de su velocidad, las relaciones se invierten en el curso de la fase IV y el impulso se ve como resultado de la velocidad o más precisamente como que describe un aspecto que tiende en cierta manera a la noción de aceleración. Es así como desde las experiencias de la transmisión mediata, se encuentran sujetos de once o doce años que dicen: "es la velocidad, y como hay cada vez más velocidad porque ellas (las bolitas alineadas) se la transmiten, hay más impulso" (OGI, 11 años 11 meses). "La fuerza se transmite de una bolita a otra. ¿De dónde viene?—. —De la diferencia de nivel (o sea, la pendiente por la que desciende la bolita activa); toma impulso, velocidad. ¿Se los puede distinguir?—. —La fuerza se acentúa con la velocidad; el impulso (*élan*) es el punto de partida de la velocidad (mostrando la pendiente); la velocidad transmite la fuerza y el impulso automáticamente. —¿Por dónde?—. —Por el eje de la bolita" (diálogo con BIA, de 15 años).

En otra experiencia[5] en la cual la bolita desciende a lo largo de

[5] J. Piaget y colab., *La formation de la notion de force*, París, PUF, 1973, EEG 29, cap. 2.

una pista que luego remonta, y sobre la cual el niño indica con trazos diferentes las variaciones respectivas de velocidad y de impulso, los sujetos de este estadio convienen en indicar aceleraciones marcadas, y a considerarlas como un factor decisivo (y esto a pesar de la falta de precisión en el vocabulario). Así por ejemplo, para TRI (12 años 2 meses) la fuerza depende del peso ("cuanto más pesado, más fuerza tiene"), pero aumenta también "con la velocidad que tiene: el impulso (*élan*). Cuanto mayor es el impulso, más fuerza tiene". GIL (13 años) representa una aceleración muy regular, y habla de ella tanto en términos de impulso (*élan*) como de velocidad. Veamos cómo lo manifiesta en el diálogo: "—¿De dónde toma este impulso?—. —Cuanto más desciende, más rápido va—. —¿Es la velocidad la que da el impulso (*élan*)?— (Asiente.) —¡O el impulso el que da la velocidad! Si no tiene velocidad no tiene impulso, y si no tiene impulso no tiene velocidad." Sin embargo, para GIL el impulso (*élan*) es necesario "porque no se puede partir enseguida, de golpe"; el impulso se confunde pues con la aceleración, en tanto que la fuerza supone además el peso. El hecho decisivo en esta fase final es por consiguiente el descubrimiento o la explicación de la aceleración. Si, por así decir, el sujeto distingue además entre impulso y movimiento en tanto que velocidad, el impulso no es sin embargo más que el incremento de esta última y no constituye ya un factor causal separado que engendra el movimiento. Lo esencial del progreso que se ha cumplido de esta manera consiste pues en un esfuerzo de cuantificación: sin recurrir todavía a una métrica propiamente dicha, es decir a medidas de espacios o de tiempos, y contentándose con evaluaciones en más y en menos, el sujeto indica de manera inequívoca los intervalos espaciales crecientes que recorre el móvil en su descenso, sobreentendiendo que se trata de los mismos tiempos; es este incremento cuantificado de la velocidad lo que caracteriza en cada caso las relaciones, aunque mal definidas verbalmente, entre el movimiento y el impulso. En cuanto a la fuerza, es función de esta aceleración pero también de la masa (llamada peso). A falta de un sistema reflexivo de conceptos estabilizados en una teoría propiamente dicha, estamos en presencia de todos los elementos que serán necesarios, como contenidos, para su elaboración: lo que falta no es más que una organización formal.

6. *Conclusiones*

Conviene ahora tratar de poner de manifiesto el modo de construcción que caracteriza las cuatro fases así distinguidas, para compararlas a esa otra construcción, de naturaleza muy superior y sin embargo muy similar, que ha sido descrita precedentemente en lo que respecta a la formación histórica de las teorías.

Este modo de construcción puede ser reducido a dos procesos esen-

ciales: por una parte, una diferenciación gradual de las variables durante las fases I a III, que resulta de los ensayos de "puesta en correspondencia" y, sobre todo, de la corrección de aquellas que se revelan inadecuadas; por otra parte, una integración cuantificante, durante la fase IV, de los elementos cuya diferenciación exige la formación de una nueva estructura.

La fase I puede, a este respecto, ser caracterizada por un máximo de indiferenciación debida a las correspondencias ilegítimas entre los cuerpos vivientes e inertes. La representación del movimiento seguramente se debe a un "reflejamiento" de los esquemas de la acción propia sobre el nivel de la conceptualización. Estos esquemas consisten tanto en desplazamientos manuales de objetos como en desplazamientos del cuerpo propio. Este "reflejamiento" constituye ya, por sí mismo, una puesta en correspondencia, y de allí va a resultar una de otras que van a ligar las acciones de los objetos a las del sujeto. Esto es tanto más claro en los niveles sensorio-motrices donde las primeras conductas instrumentales o preinstrumentales (jalar un soporte para alcanzar un objeto alejado que está situado sobre él; usar un palo para atraer algo, etc.) utilizan los intermediarios como prolongación del cuerpo propio. Resulta de aquí que todos los movimientos tienen una meta, que esto supone una actividad interna de los móviles, que la fuerza es concebida según el modelo aristotélico de un desencadenamiento de esta actividad y no exclusivamente como un empuje, etc. De donde queda claramente de manifiesto esta especie de biomorfismo generalizado que se traduce por la bipolaridad de los motores externo e interno.

La primera diferenciación importante se manifiesta luego, en la fase II, con la corrección de estas correspondencias ilegítimas y, por consiguiente, la eliminación del motor interno. En cuanto al mecanismo de estas correcciones diferenciadoras, hay que buscarlo en correspondencias más precisas entre los movimientos, sus condiciones y sus resultados. Cuando, por ejemplo, una bolita golpea el bloque de madera, y la bolita que está apoyada en el lado opuesto se pone en movimiento, el sujeto ya no dirá —si el fenómeno se repite regularmente y el bloque es remplazado por un intermediario diferente— que la segunda bolita partió por sí misma como un animal que huye al arribo de otro. A este nivel interpretará esa correspondencia como una "función" en un sentido más estricto, es decir, como una dependencia: de allí la idea de que el intermediario debió ser desplazado, y que los empujes son suficientes para originar el movimiento sin desencadenamiento de un motor interno.

Pero en este caso el motor externo, único heredero en el plano físico e inorgánico de las correcciones y diferenciaciones que eliminaron el motor interno, queda dotado de todos los poderes, y permanece como base de ese complejo indiferenciado que hemos descrito bajo el

término de "acción global" *mve*. Esta indiferenciación residual se manifiesta en particular por el hecho notable de que si la bolita activa hace partir la última de las pasivas, el proceso debe de ser similar al de las transmisiones inmediatas, donde el empuje de *A* contra *B* hace partir de inmediato a *B;* de ahí surge la idea de que cada una de las bolitas pasivas hace avanzar a la siguiente, y esta interpretación es tan firme que si se marca con un trazo lateral la posición de cada una, el niño responderá que se han desplazado efectivamente hacia adelante pero han retomado su lugar después de haber empujado a la siguiente.

Vienen entonces las diferenciaciones propias a la fase III y que son maximales antes de la integración que necesitan en la fase IV: el sujeto distingue, en efecto, entre velocidad e impulso, así como entre éste y fuerza. Pero si bien admite una doble relación causal bastante general, según la cual el impulso se debe a la fuerza y engendra el movimiento con su velocidad, esta secuencia da lugar a ciertas ambigüedades inquietantes desde el momento en que se trata de precisar las variaciones en más o en menos (sin que se trate naturalmente de cuestiones métricas). Es así que encontramos según los sujetos (y evidentemente sin estabilidad en cada uno de ellos) todas las combinaciones entre un máximo de impulso al comienzo (de las pendientes o de los alineamientos), en el medio, o en el fin, tanto como máximos diversos para la velocidad, sin relación constante entre ellos o con los mínimos del impulso. En cuanto a la fuerza, depende de las pendientes, y de ahí su relación con el impulso, pero también depende de los pesos: solamente las masas varían según relaciones que se pueden simbolizar por la expresión $m = \frac{p}{v}$, es decir que el peso se considera como aumentado cuando los empujes aumentan y disminuido cuando disminuyen las velocidades. Se comprueba pues que si hay progreso evidente en la diferenciación de las variables o factores, estos últimos no son aún integrados en un sistema estable y debido a la ausencia de una cuantificación coherente.

Es entonces que se marca la conquista de un equilibrio relativo con referencia a la fase IV, debido a una integración cuantitativa tanto más notable cuando no hay aún medidas, y en cuanto que la síntesis no sobrepasa todavía el nivel de las funciones crecientes o decrecientes. Esta integración se manifiesta de dos maneras. En primer lugar hay un descubrimiento empírico de la aceleración sobre las pendientes, con una estructura de intervalos espaciales crecientes para duraciones iguales, o de duraciones decrecientes para los intervalos espaciales iguales: esta aceleración permite entonces unificar la velocidad y el impulso, y este último se confunde en este caso con la aceleración misma; encontramos incluso sujetos de 11 a 12 años que hablan entonces de velocidades crecientes correspondientes a un

impulso juzgado como constante en tanto corresponden a crecimientos uniformes de la velocidad. En segundo lugar, esta estructuración se acompaña de la formación de tres formas de conservaciones: el peso no varía más con el empuje o la velocidad; en el caso de los alineamientos horizontales de las bolitas la transmisión del movimiento, a partir de ahora enteramente interna (sin suponer traslaciones), no da ya lugar a efectos acumulativos o de pérdidas, lo que anuncia la conservación de la cantidad de movimiento o de energía cinética; finalmente, en caso de una pista descendente y de un ascenso simétrico, la altura del punto de partida se reencuentra a la llegada.

Podemos ver así que las diferenciaciones debidas, en las fases I a III, a las correcciones y progresos de las correspondencias, llegan a la construcción de nuevas estructuras necesarias para la integración coherente de las variables así diferenciadas. Pero estas estructuraciones no son ya consecuencia sólo de las correspondencias: suponen además la intervención de las operaciones cuantificantes, a la vez transformantes y conservadoras, de las cuales conocemos la formación en los niños de 11 a 12 años. Notemos a este propósito que desde la fase III el descubrimiento del "impulso que atraviesa" a las bolitas implica ya la transitividad operatoria, en este caso "atribuida" causalmente a los móviles mismos.

Si tal es la psicogénesis del impulso, se puede ver que no hay nada de inverosímil en hacer corresponder los períodos históricos en el curso de los cuales el impetus ha empezado y ha llegado igualmente a una noción que está en el origen de la noción de aceleración, como componente esencial de la fuerza. Ciertamente, existe una diferencia considerable de niveles jerárquicos entre una sucesión de teorías reflexivas y los niveles de toma de conciencia y de conceptualización elemental de simples esquemas de acción que se interiorizan en operaciones. Pero en ambos casos el pensamiento sólo puede trabajar por analogías y diferenciaciones debidas a correspondencias y a sus afinamientos, y luego por integraciones en estructuras cuantitativas debidas a transformaciones operatorias. Que estos mecanismos funcionales sean precoces, y que se encuentren luego en todos los niveles, no significa en modo alguno que los sabios desde Aristóteles hasta el período prenewtoniano, hayan tomado sus ideas de su inconsciente infantil, en cuyo caso habría habido prolongamiento inmediato y no similitud de procesos constructivos. Esta similitud prueba, por el contrario, algo mucho más instructivo: que nivel a nivel el funcionamiento de la inteligencia permanece el mismo y debe reconstruir sin cesar para rebasar; el progreso del saber no consiste pues en simples adiciones sino en reorganizaciones que condicionan las creaciones. Lo que parece por el contrario misterioso es la considerable aceleración del desarrollo que se manifiesta en cuanto a este problema del impetus, en la sucesión de estadios en el niño con respecto al de los

períodos históricos. La razón debe buscarse seguramente en el medio social adulto cuya acción continua se traduce por múltiples incitaciones y por problemas que se renuevan sin cesar. Pero esto no significa en modo alguno que las reacciones del niño hayan sido dictadas por un simple aprendizaje: que la atmósfera intelectual le empuje a la cuantificación no implica sino que al niño se le presentan sin cesar nuevas cuestiones, pero permanece en el sujeto la necesidad de construir por sí mismo sus instrumentos de solución en cada nuevo caso particular.

II. TRES MECANISMOS COMUNES

1. *La seudonecesidad*[6]

Esta primera forma de reacción cognoscitiva está claramente relacionada con un "mecanismo" y no caracteriza un "contenido" epistémico, aunque conduzca como resultado a conceptualizaciones. Pero si bien se trata de un resultado común a la psicogénesis (donde desempeña un papel importante) y a la historia (no solamente del pensamiento precientífico sino también de las ciencias de nivel superior)[7] es de naturaleza particular puesto que funciona ejerciendo una acción de bloqueo. El mecanismo constructivo correspondiente consiste en una "liberación" de la seudonecesidad (sea rápida o más o menos tardía). Más precisamente, la seudonecesidad constituye la fase elemental de indiferenciación de un proceso general de diferenciación o de coordinación correlativa entre lo posible, lo real y lo necesario. A un nivel elevado del pensamiento, cuando éste se refiere a las transformaciones y no ya a los predicados o las simples relaciones, una transformación real aparece como la actualización de una de las transformaciones posibles en el seno de un sistema en el cual las composiciones presentan un carácter de necesidad lógica. Pero esta situación final es producto de un largo proceso de diferenciaciones y de integraciones cuyo punto de partida está caracterizado, como es natural, por un estadio de indiferenciación en el seno del cual una forma o un movimiento observables aparecen al sujeto como los únicos posibles y, por consiguiente, como necesarios: tal es, así, la "seudonecesidad", resultante de indiferenciaciones iniciales entre lo general y lo necesario, entre lo fáctico y lo normativo (si el objeto x es como es, es porque *debe* ser así) o aun entre las "buenas formas" perceptivas (recta, círculo) y las únicas tenidas como razonablemente inteligibles.

En cuanto a los efectos de la seudonecesidad sobre la lectura de los

[6] J. Piaget y colab., *Recherches sur le possible et le nécessaire* (en prensa).

[7] Ejemplos clásicos: la geometría, concebida durante siglos como debiendo ser "necesariamente euclidiana", o el álgebra, como "necesariamente conmutativa".

datos empíricos y sobre la formación de las teorías epistémicas, son de dos tipos: limitaciones en el seno de observables posibles y falsas generalizaciones que se imponen sobre aquellas que pueden ser correctas. De aquí la paradoja de la física de Aristóteles de la cual no queda nada, a pesar de su perfecta coherencia lógica, y a pesar de que haya partido de una intención netamente empírica de apoyarse en los hechos: si bien estos hechos en principio son exactos sobre los puntos observados, son particulares y limitados y por consiguiente deformados por la seudonecesidad, de tal suerte que sus generalizaciones son a la vez inatacables desde el punto de vista de su forma lógica y de una falsedad casi sistemática en cuanto a su contenido. Las limitaciones son, en tales casos, traducidas por deformaciones.

Volviendo a la psicogénesis, este proceso de seudonecesidad se reencuentra en todos los dominios y de todas las maneras. En lo que respecta a las formas geométricas, los niños piensan que un cuadrado apoyado en un vértice no es ya un cuadrado y aun perceptivamente sus lados no son considerados iguales, ni un triángulo escaleno es un "verdadero" triángulo. En cuanto a la cinemática y al primado de los movimientos verticales y horizontales encontramos en los sujetos pequeños el modelo aristotélico del proyectil que sigue una trayectoria horizontal y luego cae verticalmente. Aquí se agregan otras invenciones. La siguiente experiencia constituye un ejemplo notable: es el caso de un niño que, apoyando el dedo en el borde de una moneda puesta sobre una mesa, logra hacerla saltar hasta una caja que está más arriba. El niño puede percibir naturalmente la trayectoria curva pero la describe así: la moneda se desliza sobre la mesa horizontalmente hasta llegar al recipiente; luego se eleva verticalmente para pasar por encima del borde. Análogamente, en el dominio causal, los más pequeños declaran, casi sin excepción, que el agua de los ríos corre y desciende "puesto que debe ir hacia el lago". Un pequeño manifestó que si la luna iluminaba de noche y no de día, era porque durante el día "no es ella la que manda", lo que constituye un bello ejemplo de indiferenciación entre lo fáctico y lo normativo, como en todas las cosmogonías primitivas.

En una palabra, la "seudonecesidad" es un fenómeno corriente en los primeros niveles de la génesis del conocimiento y expresa la dificultad de imaginar otros posibles diferentes de aquel que es actualizado en una realidad dada. Como tal, constituye pues la fase de indiferenciación inicial entre lo real, lo posible y lo necesario. La fase siguiente estará caracterizada por la apertura sobre estos nuevos posibles y la construcción de otras necesidades.

2. *Predicados, relaciones y transformaciones*

El segundo mecanismo general que surge de las conclusiones de la

sección histórico-crítica precedente es el pasaje de la centración sobre los predicados a la consideración de relaciones y luego de transformaciones. Aquí está seguramente el más importante de los mecanismos comunes a la historia y a la psicogénesis de los conocimientos: bajo otras formas y con otros contenidos diferentes del caso particular de la física prenewtoniana, corresponde a las grandes etapas que hemos denominado *intra, inter* y *trans* en la introducción y que serán elaboradas en otros capítulos de esta obra.

En lo que concierne a la psicogénesis, hay allí un proceso extremadamente general y cuya naturaleza secuencial va naturalmente de suyo ya que para lograr las transformaciones hay que pasar por las relaciones y covariaciones y ya que las relaciones (aun las más simples) no pueden ser dominadas sino por un análisis previo de las cualidades o predicados. En cuanto a la necesidad de pasar de los predicados a las relaciones y transformaciones, está ligada al carácter fundamental del conocimiento físico que no se reduce a una conexión entre observables sino que progresa solamente gracias a las actividades de un sujeto capaz de hacerlas variar y de subordinarlas así al sistema endógeno de la coordinación de las acciones.

Como ya no estamos, en esta sección, en la comparación de contenidos (como lo hicimos en las secciones precedentes consagradas a la psicogénesis) sino que estamos considerando los mecanismos como tales, el ejemplo más general que podemos dar de esta ley del desarrollo estará referido a lo que llamaremos la apertura sobre "nuevos posibles". Esto se sitúa en directa prolongación de lo que acabamos de exponer acerca de las seudonecesidades y las seudoimposibilidades.

Para estudiar la formación de "posibles" en las diferentes etapas de la psicogénesis, se realizaron en Ginebra una serie de experiencias en las cuales se propusieron a los sujetos diferentes tipos de tareas:[8] *1*] combinaciones libres, tales como desplazar tres dados sobre un cartón "de todas las maneras posibles", o imaginar "todos los caminos posibles" entre dos puntos; *2*] representar "todas las formas posibles" de un objeto del cual sólo es visible una parte; *3*] descomponer (por cortes) de todas las maneras posibles una superficie cuadrada; *4*] coordinar de todas las maneras posibles varillas articuladas; *5*] encontrar el mayor número de procedimientos posibles para lograr un objetivo dado (elevar la superficie del agua con diversos objetos, etc.); *6*] construir de todas las maneras posibles una forma geométrica (triángulo) por medio de bastoncitos, etcétera.

Pues bien, situaciones tan diferentes han dado lugar a reacciones sorprendentemente comparables en cuanto al orden de sucesión. Dado el carácter muy abierto de las cuestiones propuestas, esas reacciones son de tal naturaleza que permiten aclarar las razones del proceso:

[8] J. Piaget y colab., *Recherches sur le possible et le nécessaire.*

predicados → relaciones → transformaciones

Particularmente en el terreno del pensamiento precientífico que estamos considerando, tal proceso está estrechamente subordinado a la apertura sobre "nuevos posibles", pero por otra parte está frenado por las resistencias debidas a las seudonecesidades.

A grandes rasgos, las tres etapas que se han observado son las siguientes: *a*] formación de los "posibles", paso a paso, por sucesiones analógicas fundadas en las cualidades de los predecesores; *b*] anticipación de coposibles con sus relaciones; y *c*] series ilimitadas de "posibles" subordinados a leyes de formación recurrentes.

Si consideramos, en primer lugar, "lo posible analógico", llama la atención por la pobreza de las variaciones entre una actualización y la siguiente. Entre una y otra hay pocas diferencias y muchas semejanzas; los "nuevos posibles" no se engendran sino uno a uno, aun cuando la serie se torne larga como consecuencia de la repetición incesante de la pregunta: "¿Podemos hacerlo de otra manera?" Hay allí, todavía, una situación dominada por las seudonecesidades y cuyos instrumentos principales son visiblemente los predicados cualitativos. Los aspectos relacionales visibles para el observador permanecen implícitos para el sujeto.

Hacia los 7 u 8 años, se asiste a una modificación notable que consiste en que a partir de entonces el sujeto anticipa muchos "posibles" a la vez, que se tornan coposibles por el hecho de sostener entre sí relaciones explícitas: entre dos puntos, la trayectoria puede ser recta, o curva, o sinuosidal, con arcos que varíen en número y en forma, o aun en zigzag con variaciones de ángulos, etc. Los primeros coposibles están todavía limitados a las actualizaciones que hará el sujeto. Desde los 9-10 años, estas últimas son dadas a título de ejemplos entre otros concebibles, por la dificultad de concretizarlos a todos.

De aquí se pasa finalmente (pero sólo hacia los 11-12 años) a un "posible" que deviene "cualquiera" en comprensión e ilimitado en extensión (una "infinidad" dirá el sujeto). Con esta doble novedad: que los pequeños desplazamientos que engendran nuevos posibles puedan, como insisten los sujetos, no ser percibidos, y que obedezcan a una ley recursiva (como la sucesión de puntos sobre una línea). Algunos sujetos llegan a admitir que el número "infinito" de cambios posibles en cuanto a la posición de tres elementos sobre un gran cartón ¡será el mismo que sobre un cartón pequeño! Parece claro, por consiguiente, que en esta tercera etapa los observables son sobrepasados de lejos en la dirección de un sistema operatorio de transformaciones. Es cierto que la transformación considerada aquí por el sujeto se reduce a la ley $n + 1$ pero, aplicada a la formación de los posibles, toma un sentido evidentemente más sutil que cuando se considera la simple sucesión de números. En cuanto a las transformaciones más

complejas relativas a problemas más específicamente físicos, encontraremos ejemplos de naturaleza psicogenética en el próximo capítulo.

III. METODOLOGÍA Y MARCO EPISTÉMICO

Las conclusiones del capítulo precedente extraen la lección epistemológica de este hecho tan curioso puesto en claro por trabajos recientes: desde los albores del siglo XIII, y por consiguiente en una época en la cual la física de Aristóteles continuaba dominando la escena, una metodología notablemente precisa, debida a R. Grosseteste, a Alberto el Grande, R. Bacon y otros, había analizado muy de cerca las condiciones de la inducción y la experimentación, así como el método hipotético-deductivo. No habrían sido pues los progresos metodológicos los que habrían llevado a la formación de la física del siglo XVII, por una simple sustitución de hechos experimentales bien establecidos en lugar de los datos muy incompletos e inexactos de Aristóteles, sino el descubrimiento de nuevos problemas y las transformaciones del marco epistémico. Las cuestiones que subsisten y que nos incitan a una comparación con la psicogénesis son, por una parte, comprender por qué estas transformaciones en la conceptualización no siguieron, desde el Medievo, a la constitución de esa metodología y sobre todo, cómo ha podido ser construida esta última mucho antes de toda aplicación detallada,[9] como si se tratara de un "arte poético" elaborado antes de toda poesía.

Aun cuando pudieran parecer fantasiosas las similitudes que vamos a proponer, debemos consignar el hecho de que en un estudio realizado con B. Inhelder[10] acerca de las leyes físicas simples en los preadolescentes de 11 a 15 años que no habían recibido ningún tipo de enseñanza escolar a este respecto, aparece claramente la formación de una metodología surgida de su propia lógica y no de la práctica de la experimentación, ni de conocimientos teóricos previos. Por eso creemos que podemos encontrar, en los hechos que pasamos a describir, la prueba de que una metodología puede ser elaborada a título de lógica aplicada, y esto aun con respecto a problemas que el sujeto no ha inventado e independientemente de un marco epistémico del cual él todavía no sabe nada.

Partamos de un ejemplo.[11] Se pide a los sujetos que encuentren los factores de la flexibilidad de varillas horizontales múltiples que di-

[9] Hubo, sin duda, algunas aplicaciones, pero muy limitadas, referidas a problemas secundarios y sin un nuevo cuadro epistémico general.

[10] B. Inhelder y J. Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París, PUF, 1955.

[11] B. Inhelder y J. Piaget, *op. cit.*, cap. 3.

fieren unas de otras por su material, longitudes, espesores y forma de las secciones. En condiciones iguales, la inclinación (medida con respecto a un nivel de agua), depende de los pesos que se suspenden en uno de los extremos. En el nivel preoperatorio (5-6 años) el sujeto se limita a describir lo que ve, sin orden ni método, y a invocar, como única explicación, seudonecesidades que a veces llegan a ser explícitas (por ejemplo, en un interrogatorio de un niño de 5 años y 5 meses: "¿Por qué ésa ha tocado el agua? ¡Porque tiene que hacerlo!"). A los 7-10 años, los sujetos indican correctamente las funciones cuando el experimentador presenta pares de efectos y no hace variar más que un solo factor. Por el contrario, cuando se les pide que ellos mismos encuentren las variables que desempeñan un papel efectivo, mezclan todos los factores. Por ejemplo, un sujeto de 9 años, para probar la influencia de la delgadez, compara una varilla larga y delgada con una corta y gruesa. Luego se le hace comparar dos varillas de la misma longitud pero de espesores diferentes, y se le pregunta cuál de las dos comparaciones es la que ofrece mejor prueba: él contesta sin titubear que es la suya, puesto que (acumulando las dos variables) las varillas "son más diferentes". Hacia los 10 años, el sujeto descubre empíricamente que los efectos de dos factores particulares pueden compensarse, pero de allí no saca la idea de buscar otras compensaciones combinando variaciones de otros tipos.

En el nivel hipotético-deductivo, por el contrario (a partir de los 11-12 años), una serie de novedades modifican enteramente la situación. En primer lugar, el sujeto, antes de pasar a las experiencias que le parecen probatorias, tiende a hacer primero (por exploraciones e inferencias mezcladas), el inventario de los factores concebidos como hipotéticos y que le parece que pueden desempeñar un papel causal. Después de lo cual pasa a realizar controles y hace variar, rotando los papeles, los factores supuestos. Lo más notable es que aplica la regla "siendo iguales todas las demás cosas", es decir, que no modifica sino una de las variables a la vez y se asegura cuidadosamente la igualdad de todas las demás sobre las dos varillas que está comparando. Hecho esto, y declarando explícitamente que la variación de dos factores a la vez le impide probar nada, el sujeto admite naturalmente la posibilidad de efectos acumulativos: "¿La varilla que se doble más? — Yo la eligiría redonda (de sección), delgada, larga y de metal blando (flexible)." Por fin, dicho sujeto logra realizar y explicar compensaciones de diversos tipos por combinaciones variadas entre los factores analizados. Agreguemos que en otras experiencias, donde opera un solo factor, estos sujetos llegan tan fácilmente a las exclusiones como a la elección justa de la variable, contrariamente a lo que se podría suponer: las frecuencias de las oscilaciones de un péndulo, por ejemplo, son reconocidas como dependientes de su longitud, con exclusión del peso, de la amplitud

y del impulso que se pueda imprimir al objeto suspendido en el comienzo de la oscilación.

Parece entonces difícil negar que hay allí una metodología y el problema consiste en explicar su formación puesto que, repitámoslo, se trata de sujetos que no habían recibido ninguna enseñanza a este respecto y no poseían ninguna práctica personal de experimentación. La respuesta que se impone es ciertamente que, llegados a la construcción de las operaciones proposicionales (como la conjunción, la implicación y la disyunción) y sobre todo, sabiendo razonar sobre simples hipótesis y juzgar acerca de su verdad en función de sus consecuencias deductibles, con necesidad, estos sujetos aplican esta lógica a los problemas de hecho que les proponemos. En tanto estas operaciones deductivas implican un conjunto de partes y una combinatoria, éstas permiten una serie de análisis extraños a los simples agrupamientos de las operaciones concretas. Dicho de otra manera, su metodología no es sino una lógica aplicada a los datos de la experiencia.

Pero si tal es el caso, ¿por qué esos sujetos no llegan a construir una física y sobre todo por qué los grandes lógicos y metodólogos del siglo XIII no elaboraron una física más científica que la de Aristóteles? En lo que respecta a los preadolescentes, la respuesta es simple: *1*] somos nosotros quienes hemos propuesto los problemas y no ellos; y es la invención de los problemas la que condiciona la aplicación de la metodología; *2*] las cuestiones presentadas se refieren a hechos y leyes y tienen carácter inductivo (la inducción consiste precisamente en deducciones aplicadas a hechos), mientras que la búsqueda de "razones", o sea de significaciones epistémicas, es el motor principal de la constitución de una ciencia; *3*] cuando estos sujetos se centran espontáneamente en cuestiones causales pueden llegar a modelos válidos pero esto al nivel de las acciones y de sus conceptualizaciones sin buscar construir un "sistema" general.

En lo que respecta a los lógicos de la Edad Media (y más aún al caso de Aristóteles, inventor de la lógica sin haber extraído las "aplicaciones" a la experimentación) el problema es mucho más amplio, tanto más que, si acabamos de considerar la metodología como una lógica "aplicada", psicológicamente no podemos interpretar las explicaciones causales sino como fundadas en las operaciones del sujeto, pero en este caso "atribuidas" a los objetos y a sus interacciones materiales. El pasaje de la aplicación a la atribución parecería fácil, pero no lo es en modo alguno por razones que nos conducen nuevamente a las relaciones entre lo real, lo posible y lo necesario.

Como lo real consiste, en el punto de partida, en observables directamente obtenidos por la percepción, cada uno cree conocerlos; y puesto que se repiten con cierta generalidad, son concebidos como necesarios y únicos posibles en su dominio. Para tener necesidad de verificar que son realmente tal como parecen, la condición previa es,

pues, "sobrepasar" lo real e imaginar otros posibles y, por consiguiente, inventar problemas allí donde parecería que no hay ninguno. ¿De dónde surgen las seudonecesidades, tan limitativas que se puede interpretar la física de Aristóteles como su gran víctima? Los únicos posibles que él consideró no se referían a sistemas de composiciones operatorias sino a esos procesos predeterminados que él llama el pasaje de la "potencia" al "acto". Aunque la constitución de una ciencia experimental suponga una metodología, ésta no es suficiente puesto que su aplicación es función de los problemas que se plantea el sujeto y, correlativamente, de la búsqueda de posibles que él es capaz de imaginar. Pero los únicos problemas que podían plantearse los metodólogos medievales se referían a ciertos puntos particularmente discutibles de la física de Aristóteles y no a su valor de conjunto: para ello hacía falta, sin duda, el movimiento colectivo de ideas que no comenzó sino después del Renacimiento.

En cuanto a las relaciones entre la lógica "aplicada" propia de la metodología, y las operaciones "atribuidas" que constituyen las explicaciones causales, son evidentes; la primera se refiere a la realidad, y allí se trata de describir con la mayor precisión hechos y leyes, o de verificar que las hipótesis explicativas concuerdan entre sí, mientras que los modelos explicativos vuelven a sumergir lo real en sistemas de composiciones que son a la vez posibles y reglados con necesidad. En tal situación lo real es simultáneamente absorbido por lo posible y por lo necesario, pero sigue siendo real puesto que decide soberanamente acerca de la verdad de las hipótesis propuestas por el experimentador, estando al mismo tiempo enriquecido por esta doble asimilación que sustituye las seudonecesidades por necesidades causales coherentes. En una palabra, si el sujeto es englobado en lo real por su organismo de naturaleza físico-química, las actividades de éste (al mismo tiempo que debe adaptarse, por este mismo hecho, al medio exterior), gracias a procedimientos o metodologías prácticas o científicas, son fuente de estructuras lógico-matemáticas que engloban lo real integrándolo en el seno de lo posible y de lo necesario.

CAPÍTULO III
EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA

I. LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Si bien la historia de la matemática no comienza con los griegos, resulta conveniente tomar a Grecia como punto de partida. No queremos con ello adherirnos a una tradición que ha relegado injustamente, o por lo menos minimizado, el desarrollo de la matemática en otros pueblos de la Antigüedad, haciendo aparecer un "milagro griego" como un salto sin precedentes. La conveniencia resulta solamente de la *continuidad histórica* que puede establecerse, a partir de los helenos, en un proceso cuyas etapas sucesivas pueden seguirse paso a paso hasta nuestros días, a pesar de un cúmulo de incertidumbres iniciales.

De la matemática griega, es sin duda la geometría la rama que surge con un grado de perfección que habrá de convertirla, por muchos siglos, en paradigma de la ciencia. Dos mil años después de Euclides, representará para Newton el modelo mismo de la construcción de una teoría científica, y en ese modelo se inspirará su *Principia.*

No es nuestro propósito, sin embargo, dar una síntesis histórica de la geometría de los griegos en el sentido en que generalmente se expone la historia, sino marcar las características que ponen en evidencia sus bases metodológicas y el marco epistemológico dentro del cual se mantuvieron los geómetras griegos. Para ello, nos limitaremos a los cuatro nombres más grandes de este período: Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pappo (los tres últimos serán considerados en una sección posterior), dejando de lado muchas otras figuras consideradas importantes.

Euclides es suficientemente conocido como para que haya necesidad de entrar en detalles acerca de la significación histórica de sus *Elementos de geometría* que marcan, sin duda, la contribución más grande a la metodología de la ciencia hecha por la Antigüedad.

Las dudas acerca de si el nombre "Euclides", como autor de los *Elementos,* corresponde a un hombre o a una escuela no amenguan el mérito señalado, como tampoco importa detenerse en los antecesores que tuvo en los muchos geómetras que lo precedieron y que según el testimonio de Proclo escribieron sobre los elementos de la geometría. Este comentarista se refiere a Euclides como "quien reunió los elementos, puso orden en muchas cosas encontradas por Eudoxio,

perfeccionó lo que había sido comenzado por Theetetos, y demostró más rigurosamente lo que no había sido suficientemente bien demostrado antes de él".[1]

La magnitud del aporte realizado por Euclides al presentar en la formulación de sus *Elementos* la primera axiomatización en la historia de las matemáticas, no llegó a percibirse hasta mucho tiempo después (exceptuando a Arquímedes). En realidad, es comprendida en toda su profundidad sólo en la transición del siglo XIX al XX y a partir de los trabajos de Hilbert y de Peano. No insistiremos aquí en el análisis de este aporte por dos razones diferentes. En primer lugar, el significado del método axiomático es bien conocido y puede encontrarse claramente explicitado en cualquier buen texto de fundamentación de la matemática o de la lógica. En segundo lugar, porque una axiomatización de una teoría o de una rama de la ciencia constituye una meta, la coronación de su desarrollo, una formulación sistemática de elementos previamente elaborados a través de la cual se busca clarificar sus relaciones lógicas. Con toda la fecundidad que tiene este método, está lejos de agotar el análisis epistemológico. Desde nuestro punto de vista, dicho análisis debe ocuparse ante todo del proceso mismo de construcción, de la génesis de las sucesivas estructuraciones, de los mecanismos de pasaje de una etapa a otra en el desarrollo histórico de la ciencia.

En lo que respecta a la geometría, los *Elementos* tienen, para nosotros, el primordial interés de representar acabadamente el tipo de geometría que caracteriza el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna. Dichas características, conjuntamente con las limitaciones que involucran, sólo serán puestas de manifiesto en forma explícita en el siglo XIX, precisamente cuando tiene lugar una profunda revolución metodológica y un cambio de concepción sobre la significación de la geometría. Para comprender este proceso quizá resulte más conveniente retornar a los griegos luego de bosquejar las próximas etapas. Es a la luz de los desarrollos posteriores que cobrará sentido preciso lo que ellos lograron y las vallas que los detuvieron. Por eso el relato histórico no puede ser *lineal.*

II. LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

El primer salto espectacular, posterior a los griegos, es producido por la geometría analítica. Es René Descartes (1596-1650), con su famosa obra *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637), quien va a constituirse en el actor

[1] Proclo, *Comentario sobre el primer libro de Euclides.*

principal de este proceso, a pesar de haber sido precedido, en su trabajo, por Fermat (1601-1665). El tercer apéndice al *Discours*, titulado "La Géométrie", es el hito que marca el comienzo de la Edad Moderna en matemáticas.

Descartes y Fermat van a sustituir los puntos de un plano por pares de números, y las curvas por ecuaciones. De tal manera, el estudio de las propiedades de las curvas será remplazado por el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes. Con ello logran una "reducción" de la geometría al álgebra. El propio Descartes está plenamente consciente de la trascendencia de su obra: en el mismo año de su publicación, envía una carta a Mersenne donde le dice que su método para analizar la naturaleza y las propiedades de las curvas ha rebasado la geometría ordinaria, en la misma medida en que la retórica de Cicerón ha rebasado el *a, b, c* de los niños.

Cincuenta años después del *Discours*, Newton publica su *Principia* (1687). El cálculo diferencial creado por Newton, e independientemente por Leibniz, dará a la geometría analítica un alcance insospechado por Descartes. A partir de allí, los Bernoullis, Euler y Lagrange completarán la "reducción" de la geometría al análisis.

Vista en su perspectiva histórica, es posible establecer en qué sentido sobrepasó la geometría analítica a la "geometría ordinaria"; en qué consistió, precisamente, el "ir más allá" al cual alude Descartes, y en qué medida siguió ligada a la tradición griega. Por otra parte, de la comparación surgen con toda nitidez las características y limitaciones de esta última. Tal evaluación tuvo lugar a principio del siglo XIX. Dos geómetras franceses, Poncelet (1788-1867) y Chasles (1793-1880) serán sus mejores intérpretes.

En la Introducción a su célebre *Tratado*,[2] Poncelet establece claramente en qué sentido la geometría analítica superó a la "geometría antigua":

" . . .mientras que la geometría analítica ofrece, siguiendo la marcha que le es propia, medios generales y uniformes para proceder a la solución de las cuestiones que se presentan en la investigación de las propiedades de las figuras; mientras que ella llega a resultados cuya generalidad es, por así decir, sin limitaciones, la otra procede por azar; su marcha depende completamente de la sagacidad de quien la emplea, y sus resultados están, casi siempre, limitados al estado particular de la figura que uno considera. Debido a los esfuerzos sucesivos de los geómetras las verdades particulares se han multiplicado sin

[2] *Traité des Propriétés Projectives des Figures, ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie Descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain.* La primera edición fue publicada en 1822. Nuestras citas serán todas de la segunda edición "Corrigée et augmentée d'annotations nouvelles", París, Gauthier-Villars, 1865.

cesar, pero rara vez se ha dado el caso que el método y la teoría general hayan ganado algo."[3]

Las causas profundas de esta situación son explicadas por Poncelet de la manera siguiente:

"En la geometría ordinaria, que a menudo es llamada *la síntesis*, los principios son otros, la marcha es más tímida o más severa; la figura es descrita, nunca se la pierde de vista, siempre se razona sobre magnitudes, sobre formas reales y existentes, y jamás se extraen consecuencias que no puedan representarse, en la imaginación o a la vista, por objetos sensibles; uno se detiene desde el momento en que estos objetos dejan de tener una existencia positiva y absoluta, una existencia física. El rigor es aun llevado hasta el punto de no admitir las consecuencias de un razonamiento, establecido en una cierta disposición general de los objetos de una figura, para otra disposición igualmente general de estos objetos y que tuviera toda la analogía posible con la primera; en una palabra, en esta geometría restringida, uno está forzado a retomar toda la serie de razonamientos primitivos, desde el instante en que una línea, un punto, han pasado de la derecha a la izquierda de otro, etcétera."[4]

"La geometría de Descartes, además de su carácter eminente de universalidad, se distingue de la geometría antigua en otro aspecto muy particular que merece ser señalado: que establece, por una sola fórmula, propiedades generales de familias enteras de curvas; de tal modo que no se podría descubrir por esta vía ninguna propiedad de una curva sin que ésta hiciera descubrir al mismo tiempo propiedades similares o análogas en una infinidad de líneas. Hasta entonces no se habían estudiado sino propiedades particulares de algunas curvas, tomadas una a una y siempre por medios diferentes que no establecían ninguna ligazón entre curvas distintas."[5]

III. LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Una vez constituida definitivamente la geometría analítica, queda establecido un cuerpo de doctrina a partir del cual se va a operar una revolución profunda en el pensamiento matemático. Dos de los principales propulsores de esta revolución son Poncelet y Chasles. Las citas de ambos que hemos incluido en la sección precedente forman

[3] *Op. cit.*, Introduction, p. XI.

[4] *Op. cit.*, tomo I, pp. XII-XIII.

[5] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géometrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géometrie Moderne, suivi d'une mémorie de Géometrie sur Deux Principes Généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie*, 2a. ed., París, Gauthier-Villars, 1875, p. 95.

parte de su meditación sobre el desarrollo histórico de la geometría. Pero no se detienen allí, sino que escriben también su propia interpretación del proceso y extraen las consecuencias para una reformulación de dicha ciencia que habrá de dominar la mayor parte del siglo XIX. Pocas veces en la historia de la ciencia se da la posibilidad de seguir de manera tan clara el proceso a través del cual tiene lugar un cambio fundamental en la línea de pensamiento. Aquí no es necesario aguzar el análisis para buscar laboriosamente una interpretación adecuada. Es suficiente con escuchar a los actores del cambio explicar el origen de sus ideas.

Luego de explicar el grado de generalidad que posee la geometría analítica y, paralelamente, las limitaciones de la "Géometrie ancienne", Poncelet indaga las causas de esas diferencias:

"El álgebra emplea signos abstractos, representa las magnitudes absolutas por medio de caracteres que no tienen por sí mismos ningún valor, y que dejan a esas magnitudes toda la indeterminación posible; luego, opera y razona necesariamente sobre los signos de no-existencia como sobre cantidades que fueron siempre absolutas, siempre reales [. . .] el resultado mismo debe pues participar de esta generalidad y extenderse a todos los casos posibles, a todos los valores de las letras que allí entran. . ."[6]

Pero Poncelet comprende perfectamente que esta capacidad de generalización no reside solamente en los "signos abstractos", pues agrega poco más adelante:

"Ahora bien, uno es conducido a todas estas consecuencias no sólo cuando emplea los signos y las notaciones del álgebra; también cada vez que razona sobre una magnitud cualquiera, hace abstracción de sus valores numéricos y absolutos; en una palabra: toda vez que emplea el razonamiento sobre valores *indeterminados*, es decir, un *razonamiento* puramente *implícito*."

El problema que se plantea Poncelet consiste en buscar, por métodos propios de la geometría (es decir, sin recurrir al álgebra) la manera "de aplicar el razonamiento implícito, haciendo abstracción de la figura", y de obtener así el mismo grado de generalidad que la geometría analítica.

Chasles sigue un camino paralelo al de Poncelet y, después de haber presentado un estudio histórico que permanece aún como un clásico de la historia de la geometría, llega a conclusiones idénticas, pero incluso más claras:

" . . .reflexionando sobre los procedimientos del álgebra y buscando las causas de las enormes ventajas que aporta a la geometría, ¿no se percibe que debe una parte de sus ventajas a la facilidad de las *transformaciones* que se aplican a las expresiones que se introdujeron

[6] *Op. cit.*, tomo I, pp. XI-XII.

al comienzo?; transformaciones cuyo secreto y cuyo mecanismo constituyen la genuina ciencia y es el objeto constante de las investigaciones del analista. ¿No es natural que se busque introducir en forma similar en la geometría pura transformaciones análogas realizadas directamente sobre las figuras propuestas y sobre sus propiedades?"[7]

Sin abundar más en citas, está claro que tanto Poncelet como Chasles van a incorporar los *sistemas de transformaciones* como método fundamental de la geometría, y que intentan con ello dar a esta ciencia, independientemente del álgebra, la misma generalidad, la misma flexibilidad, la misma fecundiad que había demostrado la geometría analítica durante su desarrollo en el siglo XVIII.

Pero resulta también claro que es a partir de los métodos algebraicos que ambos geómetras van a introducir su nueva concepción de la geometría. Es también inspirándose en los métodos algebraicos que van a dar un sentido "puramente geométrico" a los elementos "imaginarios". Un ejemplo de particular significación histórica servirá de ilustración. En el capítulo II de la obra citada de Poncelet se estudian las propiedades proyectivas de las figuras y se analizan las consecuencias de aplicar ciertos teoremas, demostrados "en circunstancias de construcción general", a los casos en que puntos o rectas de las figuras en cuestión sean imaginarios. Luego se llega a las siguientes consideraciones:

a] Dos o más hipérbolas "similares y similarmente dispuestas" sobre un plano tienen sus asíntotas paralelas; por consiguiente tienen *dos puntos comunes y una secante común en el infinito.*

b] Dado un número cualquiera de elipses "similares y similarmente dispuestas" (*s* y *sd*), para cada dirección dada existe un sistema de hipérbolas "suplementarias" cuyos diámetros de contacto son paralelos; como todas ellas son *s* y *sd* tienen una secante común en el infinito, que se puede suponer paralela a la dirección dada; por consiguiente las elipses dadas tienen una secante común en el infinito, o sea que tienen *dos puntos imaginarios comunes en el infinito.*

c] Como las parábolas pueden considerarse como elipses infinitamente alargadas, todas las parábolas "similarmente ubicadas" se tocan en un punto cuya tangente está en el infinito.

d] Dos o más circunferencias situadas arbitrariamente en el plano son, evidentemente, curvas *s* y *sd* sobre dicho plano y les son aplicables los razonamientos precedentes; por consiguiente tienen *una secante ideal común en el infinito.*

De esta última proposición surge la célebre afirmación de Poncelet: "Dos círculos situados arbitrariamente sobre un plano no son, por consiguiente, completamente independientes uno de otro como uno pudiera creerlo a primera vista; tienen idealmente dos puntos imagi-

[7] Chasles, *op. cit.*, p. 196.

narios comunes en el infinito y, a este respecto, deben gozar de ciertas propiedades que pertenecen a la vez a todo su sistema, análogas a aquellas de que gozan cuando tienen secantes comunes ordinarias."

La introducción de estas ideas en la geometría proyectiva que se desarrolla durante el resto del siglo XIX va a permitir una notable generalización y simplificación de muchos resultados parciales. Así, por ejemplo, los dos puntos fijos situados en el infinito por los cuales pasan *todos* los círculos del plano (llamados luego "puntos cíclicos") permitieron aplicar también a los círculos el teorema según el cual el número de puntos de intersección de dos curvas algebraicas planas de grado m y n es igual al producto mn (la circunferencia parecía constituir una excepción por cuanto su ecuación es de segundo grado; la intersección de dos círculos sería un caso en el cual $m = n = 2$, cuyo producto es $mn = 4$).

Sobre la base de los puntos cíclicos en el infinito, Laguerre logrará luego dar una definición del ángulo formado por dos rectas. En general, la expresión analítica de todas las propiedades métricas euclidianas supone la relación entre la propiedad en cuestión y los puntos cíclicos en el infinito, o bien las cónicas y las cuádricas en el infinito introducidas más tarde por Cayley con el nombre de "absolutos". A Cayley pertenece la idea de que todas las propiedades métricas de las figuras no son otra cosa que las propiedades proyectivas en relación con los absolutos. Es importante destacar que los trabajos de Cayley se basan en su teoría de los polinomios homogéneos de dos o más variables (que él llama "quantics") y de sus invariantes. Sus estudios sobre la geometría proyectiva tienen, pues, su origen, en una perspectiva algebraica.

Las ideas de Cayley fueron desarrolladas por F. Klein. Éste logrará dar a dichas ideas un grado de generalidad tal, que hará posible una síntesis total de toda la geometría. El descubrimiento central de Klein fue la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas, así como la demostración de la independencia de la geometría proyectiva con respecto a la teoría de las paralelas. A partir de la concepción de la métrica que desarrolla Cayley, Klein establece con claridad que todas la geometrías pueden definirse en función de la naturaleza del "absoluto": cuando la superficie absoluta de segundo grado es un elipsoide, un paraboloide elíptico, o un hiperboloide *reales*, se obtiene la geometría de Bolyai-Lobatchevski; cuando la superficie es imaginaria, se obtiene la geometría no euclidiana de Riemann; cuando se trata de una esfera, se obtiene la geometría euclidiana.

Estos trabajos de Klein abren el camino a una nueva etapa de la geometría que habrá de incorporarla a la matemática moderna.

IV. ANTECEDENTES DE LA NOCIÓN DE TRANSFORMACIÓN

La noción de *transformación* constituye, pues, la base de la nueva geometría que se desarrollará en el siglo XIX. Cabe preguntarse, entonces, si no ha tenido precedentes hitóricos y, en todo caso, por qué se tardó tantos siglos en utilizarla y en tomar conciencia de su papel. Análogamente, en la medida en que dicha noción está inspirada en la geometría analítica, y que ésta se funda en la introducción de coordenadas y, por su intermedio, en la "reducción" de la geometría al álgebra y al cálculo infinitesimal, surge la pregunta sobre los antecedentes históricos de estos métodos. La historia es, en este sentido, profundamente aleccionadora y de ella podemos extraer un sólido apoyo para la teoría epistemológica. Debemos señalar, sin embargo, que la búsqueda de antecedentes no tiene por objeto establecer "prioridades" o determinar, como es frecuente en la investigación histórica, el grado de originalidad que pudo tener cierto autor o cierta escuela. Nuestra búsqueda es, en cierto modo, contraria a esta práctica histórica. Nuestro objetivo será, ante todo, establecer qué factores impidieron el desarrollo de ideas que, luego de ser vislumbradas, quedaron en estado embrionario, a veces durante siglos. La hipótesis de trabajo que hemos seguido ha sido considerar que estos hechos no son fortuitos y que, en general, esos períodos "de espera" corresponden a períodos de desarrollo de otros métodos u otros conceptos sin los cuales aquellas ideas no pudieron ser elaboradas en profundidad.

a. *Los antecedentes griegos*

Entre los textos de Euclides que se han perdido figuran tres libros sobre los porismas, una obra que, de acuerdo con los testimonios de Proclo y de Pappo, tendría una profundidad aún mayor que la de los *Elementos*. Sólo quedan de ella treinta proposiciones que fueron incluidas por Pappo en sus "Collections Mathématiques". El significado mismo del término "porisma" intrigó a los geómetras de todos los tiempos, ya que aparecía como una nueva noción, a la par de las nociones de "teorema" y de "problema", participando, en cierta medida, de la significación de ambas. Fue Chasles quien intentó una nueva interpretación del significado de los porismas. Sus conclusiones son terminantes:

"Si este libro de los porismas nos hubiera llegado, hubiera dado lugar desde hace mucho tiempo a la concepción y al desarrollo de las teorías elementales de la *relación anarmónica*, de las *divisiones homográficas* y de la involución."[8]

[8] Chasles, *Les trois livres des porismes d'Euclides rétablis d'après la notice et les lemmes de Pappus*, París, Mallet-Bachelier, 1860, p. 14.

Con Arquímedes se introduce un concepto nuevo que permitió obtener por primera vez la cuadratura del espacio comprendido entre una curva y líneas rectas. Para ello concibe dicho espacio (cuya medida suele llamarse, en forma abreviada, el "área de la curva") como el límite al cual se aproximan, de más en más, los polígonos inscritos y circunscritos cuando se multiplica por bisección el número de lados, de manera que la diferencia entre ellos se haga más pequeña que cualquier cantidad dada. Arquímedes aplica por primera vez este método, que llama de *exhaución* a la cuadratura de la parábola. Se encuentra allí, sin duda, el germen de lo que será el cálculo infinitesimal, pero que tardará más de dieciocho siglos en desarrollarse.

Apolonio aporta, en sus "Éléments de coniques", no sólo una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. A este respecto se ha dicho y se suele repetir con frecuencia, que Apolonio es el primero que utiliza un sistema de coordenadas para sus demostraciones geométricas. Veremos, en un ejemplo concreto, en qué medida Apolonio utiliza realmente un sistema de coordenadas, y qué es lo que lo separa de Fermat y Descartes. El ejemplo está tomado, por su gran claridad, de la reconstrucción hecha por Chasles del método empleado por Apolonio para obtener lo que el primero llama "la propiedad fundamental de las cónicas":

"Consideremos un cono oblicuo, de base circular: la recta que pasa por la cúspide y por el centro del círculo que le sirve de base se llama *eje* del cono. El plano que contiene al eje, perpendicular al plano de la base, corta al cono según dos aristas y determina un diámetro en el círculo: el triángulo que tiene por base este diámetro y por lados las dos aristas se llama *triángulo por el eje*. Apolonio supone, para formar secciones cónicas, un plano que corta perpendicularmente al plano del triángulo por el eje. Los puntos donde este plano encuentra los dos lados del triángulo son la cúspide y la curva; y la recta que une estos dos puntos es un diámetro. Apolonio llama a este diámetro *latus transversum*. Si por uno de los dos vértices de la curva se levanta una perpendicular al plano del triángulo por el eje, si le damos una cierta longitud, determinada, como lo diremos luego, y si por la extremidad de esta perpendicular se traza una recta a la otra cúspide de la curva; si por un punto cualquiera del diámetro de la curva se levanta perpendicularmente una *ordenada*: el cuadrado de esta ordenada, comprendido entre el diámetro y la curva, será igual al rectángulo construido sobre aquella parte de la ordenada que está comprendida entre el diámetro y la recta, y sobre la parte del diámetro comprendida entre la primera cúspide y el pie de la ordenada. Tal es la propiedad original y característica que Apolonio reconoce a sus secciones cónicas, y de la cual se sirve para concluir, por medio de

transformaciones y de deducciones muy hábiles, casi todas las otras. En sus manos, como hemos visto, desempeña aproximadamente el mismo papel que la ecuación de segundo grado con dos variables en el sistema de geometría analítica de Descartes."[9]

Finalmente, con respecto a Pappo señalaremos solamente dos aspectos de su obra en los cuales puede también verse una cierta anticipación de los métodos y conceptos que utilizará la geometría proyectiva. El primer ejemplo proviene de su estudio sobre la cuadratriz de Dinostrato. El segundo corresponde a su descubrimiento de la relación anarmónica.

La generación de la cuadratriz es bien conocida: es la intersección de un radio de círculo que gira alrededor del centro y de un diámetro que se desplaza paralelamente a sí mismo. Pappo dice luego que "esta curva puede formarse o bien por los lugares geométricos de la superficie, o bien por la espiral de Arquímedes".

Primer método:

"Sea una hélice descrita sobre un cilindro recto circular; desde sus puntos se bajan perpendiculares sobre el eje del cilindro: estas rectas forman la superficie helicoide rampante; por una de estas rectas se traza un plano, convenientemente inclinado sobre el plano de la base del cilindro; este plano corta la superficie según una curva cuya proyección octogonal sobre la base del cilindro es la cuadratriz."

Segundo método:

"Si una espiral de Arquímedes es tomada como base de un cilindro recto; si se concibe un cono de revolución que tenga por eje la arista del cilindro trazado por el origen de la espiral; este cono cortará la superficie cilíndrica según una curva con doble curvatura. Las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos de esta curva sobre la arista en cuestión del cilindro, formarán la superficie helicoide rampante. Un plano trazado por una arista de esta superficie, y convenientemente inclinado, la cortará según una curva cuya proyección octogonal sobre el plano de la espiral será la cuadratriz demandada."

La segunda contribución de Pappo de la cual nos vamos a ocupar, es su descubrimiento de la relación que fue bautizada por Chasles "relación en función anarmónica". Como invariante de todo sistema de relaciones proyectivas, esta función desempeñará un papel muy importante en la geometría del siglo XIX. En la proposición 129 del libro séptimo de "la collection mathématique", Pappo la describe de la manera siguiente:

"Cuando se trazan cuatro rectas desde un mismo punto, forman sobre una transversal, trazada arbitrariamente en su plano, cuatro segmentos que tienen entre ellos una cierta relación constante cualquiera que sea la transversal."

[9] Chasles, *Aperçu historique*. . . , p. 18.

Es decir, si a, b, c, d son los cuatro puntos en los cuales una transversal cualquiera corta las cuatro rectas, "la relación $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ será constante, cualquiera que sea la transversal".

Los ejemplos que hemos tomado de los cuatro geómetras griegos a los cuales hemos hecho referencia, muestran que existía entre ellos, en forma embrionaria, una cierta idea del uso de coordenadas (Apolonio), de modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite (Arquímedes), así como una utilización de la noción de transformación por proyecciones (Euclides, Pappo).

Desde un punto de vista histórico crítico y en función de nuestro objetivo epistemológico, debemos formularnos ahora algunas preguntas. En primer lugar, ¿podemos considerar a estos geómetras como predecesores de Descartes, de Newton y de los geómetras del siglo XIX? En segundo lugar, ¿cuál es la razón por la cual los métodos que hemos bosquejado en los ejemplos mencionados no fueron desarrollados ni aun aplicados en el curso de los siglos siguientes? Más aún, ¿por qué estos métodos no modificaron las características de la geometría griega señaladas más arriba?

Antes de responder a estas preguntas, haremos referencia a algunos ejemplos de "precursores" de los geómetras del siglo XIX, con objeto de poner claramente en evidencia las características distintivas de unos y otros.

b. *Ejemplos característicos de los siglos XVI y XVII*

El mérito de haber utilizado por primera vez de una manera explícita una transformación como método para resolver un problema geométrico parecería poder ser atribuido a Vieti. Es en sus trabajos sobre la trigonometría esférica donde él aplica una transformación de los triángulos esféricos descrita en estos términos: "Si de los tres vértices de un triángulo esférico, como polos, se describen arcos de círculos máximos, el triángulo nuevo que resultará será recíproco del primer triángulo, tanto con respecto a los ángulos como con respecto a los lados." Chasles, autor de esta cita, agrega el comentario siguiente:

"Apresurémonos a decir que este triángulo *recíproco* no es precisamente el triángulo polar suplementario, en el cual los lados son los suplementos de los ángulos del triángulo primitivo, y los ángulos los suplementos de los lados: dos de los lados del triángulo de Vieti son iguales a los ángulos del triángulo propuesto, y el tercer lado es igual al suplemento del tercer ángulo. De esta manera, la perfecta reciprocidad de los triángulos suplementarios, de donde resulta esta dualidad constante de las propiedades de las figuras esféricas, no tiene lugar en los triángulos de Vieti. Pero no por ello esta idea fecunda de transformar así los triángulos, para ciertos casos de la trigonometría

merece menos ser señalada como el primer paso de un espíritu inventor y el primer germen de los métodos generales de dualización. . ."[10]

Se debe a Snellius (en su tratado de trigonometría publicado en 1627) la aplicación correcta de la noción de triángulos suplementarios y la utilización sistemática de transformaciones de triángulos inaugurada por Vieti. Sin embargo, como veremos también en otros dominios, ni la noción abstracta de *dualidad* ni el concepto general de transformación (que surgiría aparentemente de manera natural y directa de la obra de Snellius) fueron concebidos como tales en dicha época.

Después de Snellius, Desargues (1595-1662) y Pascal (1623-1662) son quienes darán el próximo paso importante. Los dos retomarán el estudio de las cónicas, tan caro a los geómetras griegos, desde un punto de vista más general que permitió simplificar y extender en gran medida el conocimiento de los antiguos sobre las propiedades de estas curvas.

La simplicidad de las ideas introducidas por Desargues (ideas que le sirvieron de fundamento para elaborar su teoría) es tal, que hoy podríamos considerarlas como banales. No basta con asombrarnos de que no hayan sido aplicadas antes, ni de que se haya requerido más de un siglo para que se expandieran y se tornara un método natural de la geometría, este hecho exige también una reflexión epistemológica seria.

Las dos ideas fundamentales sobre las cuales trabajaron Desargues y su genial discípulo Pascal, son las siguientes: en primer lugar, Desargues considera secciones completamente arbitrarias de un cono de base circular. Luego concibe la idea de extender a las otras tres cónicas las propiedades del círculo, puesto que se derivan de las diferentes maneras según las cuales es posible cortar un cono de base circular.

La línea de pensamiento comenzada por Desargues y Pascal será seguida por otros dos discípulos: La Hire (1641-1671) y Le Poivre. Por otra parte, hasta el momento de ser redescubierto por Chasles, el segundo de estos autores permaneció casi desconocido. Ambos recurren a un método de transformación que pone en correspondencia puntos y rectas de una cónica arbitraria dada, con puntos y rectas de un círculo. Descubren así propiedades de alineación y de concurrencia que serán el preludio de la geometría descriptiva de Monge. Encontramos pues en su obra una anticipación de las figuras homológicas cuya teoría no será abordada antes de Poncelet.

c. *¿Por qué el retraso de las transformaciones?*

Las consideraciones históricas precedentes presentan un problema central para el análisis epistemológico: la razón de la constitución

[10] Chasles, *Aperçu historique*. . . , pp. 54 y 55.

tan tardía de las transformaciones. Ya hemos destacado la ausencia de transformaciones en la geometría de los griegos, no obstante los porismas de Euclides, las coordenadas de Apolonio, y los esbozos de transformaciones de figuras en Arquímedes y Pappo.

Se pueden invocar razones profundas para dar cuenta del carácter tardío de las transformaciones. Estas razones serán analizadas en detalle en el capítulo sobre la psicogénesis de las estructuras geométricas. Aquí nos limitaremos a destacar que la noción de transformación no aparece claramente sino con el álgebra y el análisis, y que estas disciplinas se desarrollarán solamente a partir de los siglos XVI y XVII.

Creemos haber demostrado en este capítulo que la noción de transformación en geometría tiene un origen innegable: se encuentra precisamente en la geometría analítica. Sin embargo, debemos hacer aquí dos observaciones. En primer lugar, si, como los textos corrientes señalan, la geometría analítica constituye la aplicación del álgebra a la geometría, es inseparable del cálculo infinitesimal, y este último, que se desarrollará en estrecha interacción con la geometría misma, tendrá necesidad de todo el siglo XVIII para consolidarse. En segundo lugar, será necesario esperar hasta el siglo XVIII para ver aparecer ciertos desarrollos esenciales para el álgebra, para el cálculo, y por consiguiente para la geometría, antes de que esta última esté en condiciones de dar el gran paso adelante iniciado por Monge y "tematizado" por Poncelet y Chasles.

Para dar una idea de la complejidad de los procesos de interacción entre los problemas tradicionales de la geometría euclidiana, y el desarrollo del álgebra y del cálculo, puede ser suficiente con señalar que no es sino con Euler, y ya muy avanzado el siglo XVIII, que se llegará a mostrar de qué manera los movimientos y las simetrías de las figuras están ligados al problema del cambio de ejes de coordenadas, y cómo la simetría puede ser traducida analíticamente. Es bien sabido que fue a lo largo de este camino que Euler llegó a demostrar que un desplazamiento plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de una simetría. Es la época de la consolidación de los métodos de cálculo y de su desarrollo a través de los problemas que presentaba la geometría, sea directamente, sea a través de la mecánica. Ya hemos mostrado a través de las declaraciones explícitas de Poncelet y Chasles cómo esta interacción va a retroalimentar el pensamiento geométrico y producir así, apoyándose en el álgebra, el gran desarrollo del siglo XIX.

V. LA ÚLTIMA ETAPA: LA ALGEBRAIZACIÓN

Los desarrollos que tuvieron lugar en la primera mitad del siglo XIX ejercieron su influencia hasta los comienzos del siglo XX y aun más

allá. Ellos dominarán el campo de la geometría hasta el momento en que las ideas de Sophus Lie y de F. Klein, por una parte, y las de Riemann, por la otra, abrirán su camino y permitirán que se extraiga de ellas toda la riqueza de su contenido.

La etapa a la cual condujo el concepto de transformación (tal como fue concebido por Poncelet y por Chasles) ha tenido una larga duración marcada por un brillante apogeo. Pero la sistematización de la geometría que ellos realizaron presentaba una limitación fundamental: a través de ella, la distinción entre propiedades métricas y propiedades proyectivas no pudo ser formulada de manera estricta. No es sino con Lie y Klein, sobre la base de la noción de *grupo* de transformaciones y de sus correspondientes invariantes, que se dispondrá de la herramienta necesaria para introducir las distinciones precisas entre los diferentes tipos de geometría. Fue Felix Klein quien formuló de manera magistral el nuevo punto de vista, inaugurando así una nueva etapa. El pasaje de la etapa de transformaciones proyectivas a la de las estructuras de grupo constituye una preciosa lección para la epistemología.

La idea de transformación introducida durante la etapa precedente tenía un origen claramente intuitivo. El recurso a la intuición ha tenido ventajas evidentes que ya hemos señalado, pero impone igualmente serias limitaciones. Cada vez que fue aplicado un tipo de transformación, en cada caso particular, permitió estudiar las propiedades de las figuras con un grado de generalidad muy elevado, pero faltaban los medios para identificar y expresar la *estructura* del conjunto de estas transformaciones. La teoría de los grupos va a proveer el instrumento necesario para reformular los problemas en otro nivel, a partir del cual esta estructuración se pondrá de manifiesto.

Generalmente se considera que Klein estaba ya familiarizado con la teoría de los grupos a través del libro de Jordan (1870). Sin embargo, sus relaciones con Lie pueden muy bien haber sido el origen de sus primeros contactos con los trabajos de Galois y de Abel. No se trata aquí de intentar dilucidar la originalidad de Klein. Lo que nos interesa es la formulación que hace en su *Programa de Erlangen* (1872) que es, sin duda, la más clara y precisa reformulación de la geometría que se haya realizado jamás.

Las concepciones de Klein tienen como punto de partida la noción de grupo de transformaciones del espacio. Pero, como lo indica Dieudonné, "la gran originalidad de Klein es haber concebido la relación entre una geometría y su grupo, invirtiendo los papeles de estas dos entidades de tal manera que el grupo fuera el objeto primordial, mientras que los diversos espacios sobre los cuales opera pusieran en evidencia diversos aspectos de la estructura de grupo".

El mismo F. Klein explica lo que hace en un párrafo admirable que merece ser citado *in extenso:*

"Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también del sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones con similitud, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes. Llamaremos *grupo principal* de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones; las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia con respecto a las transformaciones del grupo principal. En efecto, si se considera al espacio como indesplazable en un momento dado, como una multiplicidad fija, cada figura posee una individualidad propia; las propiedades que posee como individuo, son las únicas propiamente geométricas y que las transformaciones del grupo principal no altera."

Klein llega así a una profunda reformulación de la geometría: "Como generalización de la geometría se presenta así la cuestión general siguiente: dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar los entes desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo."

Y Klein va a dar aún mayor precisión a esta definición: "Dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, desarrollar la teoría de los invariantes relativos a este grupo."

Llegamos así al final de un proceso que comienza con Monge y que es aclarado por Poncelet y Chasles: la introducción en geometría de la noción de transformación. Klein va a dar el gran paso adelante al pasar de las transformaciones a las estructuras que las "explican". En efecto, a partir del momento en que se reconoce que el sistema de transformaciones que deja invariantes ciertas propiedades geométricas forma un grupo, se puede remplazar el análisis de las transformaciones mismas por el análisis de las relaciones internas del grupo. Son las relaciones entre los elementos de una estructura dada las que pasan al primer plano.

El pasaje de una etapa a la otra significa poner en relación diversos grupos de transformaciones que caracterizan las diversas geometrías, concebidas como subgrupos de un sistema global que las contiene a todas. Es en esto en lo que consiste la "subordinación" de las diversas geometrías a un grupo único, del cual ellas devienen "casos particulares".

VI. CONCLUSIONES

1. *La noción de transformación en geometría*

La noción de *transformación* que se anuncia en los porismas de Euclides y en las construcciones de Pappo, permaneció durante siglos, dentro del dominio de la geometría, en estado embrionario. Como hemos señalado más arriba, a partir del siglo XVI, y durante tres siglos, se abre paso lentamente, con intuiciones a veces brillantes, pero sin llegar a erigirse en "método universal" para la geometría.

En realidad, la noción misma de transformación no fue elaborada durante este período. Se la *aplica* sin tener conciencia ni de su significación, ni de su alcance. Esto no debe sorprendernos. Se trata de una regla general que será frecuentemente puesta en evidencia en el desarrollo de esta obra. En efecto, las nociones abstractas de las matemáticas no fueron utilizadas, en un comienzo, sino en forma instrumental, sin que dieran lugar a una reflexión sobre su significación general, y sin siquiera tomar conciencia del hecho mismo de estarlas utilizando. A esto último se llega luego de un proceso más o menos prolongado a cuyo término la noción particular (que ya ha sido utilizada en numerosos casos de aplicación) se torna objeto de reflexión para constituirse en concepto. Este pasaje del *uso* o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la *conceptualización*, constituye lo que hemos convenido en llamar *tematización*.

El tiempo que transcurre entre el momento histórico en que la transformación comienza a ser utilizada, y el momento de su tematización no difiere mucho del intervalo que media entre, por ejemplo, la utilización de los conjuntos —haciendo una clara distinción entre los elementos de conjuntos diversos— y el momento en que la noción de conjunto comienza a ser tematizada.

El desfasaje entre uso y tematización no es un hecho histórico fortuito. Tanto el análisis histórico-crítico como los estudios psicogénicos muestran, con una convergencia sorprendente, que se trata en realidad de un hecho que tiene una profunda significación epistemológica. En el caso que nos ha ocupado en este capítulo, la razón fundamental de la tematización tardía de la noción de transformación surge claramente de las citaciones de Poncelet y de Chasles que hemos transcrito. Ambos reconocen que es a través de la geometría analítica, es decir, del álgebra, que Monge llega a su geometría descriptiva. Ambos se apoyan también en la geometría analítica y en el álgebra como justificación de sus métodos y fundamentación de sus teorías sobre la geometría. Está claro, por consiguiente, que la naturaleza operatoria de la transformación algebraica constituye la base de la conceptualización en el campo de la geometría.

El intervalo de tiempo que va de Desargues y Pascal a Poncelet y

Chasles es el período durante el cual se consolida la geometría analítica, con su punto de apoyo en las transformaciones algebraicas. La geometría permanece en este período subsidiaria del álgebra. Las transformaciones tienen lugar *a través* de las ecuaciones. La geometría no aparece sino al comienzo del proceso, con el enunciado del problema, y al final del mismo, como *traducción del resultado* de las transformaciones algebraicas.

Fue necesario un largo período de trabajo incesante en álgebra y cálculo infinitesimal, así como en la traducción geométrica de los resultados, para llegar a conceptualizar la idea de transformación geométrica sin pasar por el álgebra o el análisis. Fue necesario trabajar intensamente con "segmentos negativos" y con "soluciones imaginarias", apoyándose continuamente en el álgebra para llegar, por ejemplo, a la brillante conclusión de que todas las circunferencias de un plano pasan por los dos puntos cíclicos de dicho plano, y para poder demostrarlo por medio de simples *transformaciones puramente geométricas.*

Como "testigo" principal de las dificultades de este proceso, podemos citar a un geómetra tan eminente como Carnot, para quien la utilización de cantidades negativas o complejas aplicada a la representación de entidades geométricas es "absurda" e "ininteligible". En su *Geometría de posición*, afirma categóricamente: "Yo demuestro que tal noción es completamente falsa y que de su admisión resultarán los más grandes absurdos." Y más adelante agrega: "Por este principio de las cantidades negativas tomadas en sentido contrario a las cantidades positivas uno es inevitablemente conducido a error."[11]

La distancia conceptual que separa a Euclides y Pappo, Vieti y Snellius, y aun Desargues y Pascal, de los geómetras del siglo XIX está determinada por la ausencia, entre los primeros, del instrumento operativo esencial: las transformaciones. Hasta allí, la geometría permaneció aproximadamente dentro del marco conceptual que le asignaron los griegos. El enorme avance que significa la geometría analítica no llega todavía, por sí mismo, a producir una modificación de dicho marco. Los 185 años que transcurren entre la *Géometrie* de Descartes y el *Traité* de Poncelet fue el tiempo requerido para arribar al desarrollo del instrumento operatorio potencialmente capaz de revolucionar la geometría.

Pero durante todo ese largo período dicho instrumento se aplica solamente a extender los conocimientos sobre las propiedades de las curvas y de las figuras *sin modificar esencialmente el punto de vista sobre dichas propiedades.* Ni la geometría analítica, ni el análisis,

[11] Sobre esta posición de Carnot, fuente de sus dificultades, y la relación con Poncelet, véase *Il principio di continuitá e l'imaginario in Geometría,* de E. Bonipiani, en el volumen II.

logran producir esa modificación no obstante ser ellos quienes desarrollan los poderosos medios que la harán posible. Desde el punto de vista de la concepción de la geometría, tanto Descartes como Newton pertenecen a la tradición griega, aunque sus métodos la rebasen en mucho.

Las consideraciones precedentes proveen los elementos necesarios para tratar de dilucidar los problemas epistemológicos del desarrollo histórico que hemos expuesto en este capítulo. Esto nos permitirá una comprensión más profunda del *proceso* que opera en dicho desarrollo. Podremos entonces retornar a la historia siguiendo el hilo conductor que vinculará entre sí las etapas más significativas del desarrollo de la geometría, y "explicar" tanto la naturaleza de cada una de ellas como su orden de sucesión.

2. *Los tres tipos de algebraización de la geometría*

La aplicación del álgebra a la geometría puede realizarse a partir de tres puntos de vista diferentes en su concepción y en su alcance:

a] Como una simple *traducción algebraica* de la relación entre los elementos de una figura en un problema geométrico específico;

b] como una aplicación de la noción de *función algebraica* y de las transformaciones de dichas funciones;

c] como una aplicación del concepto de *estructura algebraica* y de las relaciones entre los elementos de una estructura dada.

En el caso *a*], asignamos, por ejemplo, un número a un segmento, estableciendo una *correspondencia* que es, por así decir, fija: está basada en una ordenación de los puntos de un segmento y en la elección de una constante (unidad de medida). Así es como Apolonio obtiene la propiedad fundamental de las secciones cónicas de la cual derivan todas las otras. Las relaciones que pueden ser establecidas por este método corresponden estrictamente a las *relaciones internas entre los elementos de una figura dada.*

El caso *b*] corresponde a la etapa inaugurada por la geometría analítica y continuada luego por la geometría proyectiva. La idea fundamental, como ya lo hemos visto, es la noción de transformación. Aquí, la representación algebraica no corresponde —como en el caso *a*]— a un elemento geométrico de magnitud variable, sino a un elemento variable en un sistema de transformaciones posibles.

El pasaje del caso *b*] al caso *c*] significa una nueva "relativización". No se trata ya de establecer correspondencias punto por punto entre las figuras, sino correspondencias entre los elementos de una *estructura* dada. Más específicamente, se realiza aquí una inversión del proceso: no se trata ahora de transformar una figura en otra, verificando que se cumplan ciertas condiciones (mantener sin variación ciertos elementos o relaciones); se trata más bien de una estructura

que opera sobre un conjunto de elementos. Pero a fin de ver claramente lo que esto significa, es necesario hacer ciertas consideraciones de otra naturaleza.

3. *Las relaciones de base: intrafigural, interfigural y transfigural*

El punto de partida del análisis que presentaremos aquí está basado en un conjunto de conceptos desarrollados en la Escuela de Ginebra a través de las investigaciones realizadas en psicología genética. La fecundidad de este aparato conceptual, aplicado a la historia de las ciencias, muestra no sólo la *convergencia* de los estudios histórico-críticos y psicogenéticos —sostenida durante muchos años por uno de los autores de esta obra— sino también la posibilidad de una *interacción* efectiva en el proceso de elaboración de sus temas respectivos. En el caso particular de este capítulo, desarrollado en estrecha colaboración con el siguiente, las nociones surgidas del análisis psicogenético han servido de guía para clarificar desarrollos históricos o aun para hacer surgir aspectos importantes que la narración histórica normal mantendría completamente ignorados. A su vez, dicho análisis produjo una retroalimentación que permitió apreciar la generalidad de ciertos procesos al nivel psicogenético. Las nociones que utilizaremos serán expuestas más en detalle en capítulos subsiguientes. Las presentaremos aquí en forma resumida para fundamentar las conclusiones que conduzcan a una explicación epistemológica de la evolución de la geometría.

La geometría comienza, con la síntesis que hace Euclides, por un período durante el cual se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como *relaciones internas* entre los elementos de dichas figuras o dichos cuerpos. No se toma en consideración el *espacio* como tal, ni por consiguiente las transformaciones de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda. A esta etapa la llamaremos *intrafigural*, utilizando una palabra ya empleada en psicología genética para dar cuenta del desarrollo de las nociones geométricas en el niño (véase el capítulo siguiente).

Viene luego una etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de transformaciones que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia, pero sin llegar a la subordinación de las transformaciones a estructuras de conjunto. Es el período durante el cual domina la geometría proyectiva. Esta etapa será denominada *interfigural*.

Comienza luego una tercera etapa que llamaremos *transfigural*, caracterizada por la preminencia de las estructuras. La expresión más característica de esta etapa es el *Programa de Erlangen* de Felix Klein.

Estas tres etapas, que están bien delimitadas en la historia de la geometría, ponen en evidencia una clara evolución en el proceso de conceptualización de las nociones geométricas. El pasaje de una etapa a la siguiente no está caracterizado por un período de "incremento" en los conocimientos (con respecto a la etapa precedente), sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales, tal como lo hemos señalado a lo largo de nuestro análisis en las secciones precedentes.

Tal proceso evolutivo provee un sostén importante a la posición mantenida durante mucho tiempo por la epistemología genética. En efecto, sobre la base de numerosos ejemplos tomados de la psicología genética, se ha podido mostrar que el desarrollo cognoscitivo no procede linealmente por acumulación de conocimientos, sino que exige, cada vez que se accede a un nuevo nivel, la *reconstrucción* de lo que fue adquirido en los niveles precedentes. Se trata pues de una *reorganización* de los conocimientos, a la luz de nuevos puntos de vista, y de una *reinterpretación* de los conceptos de base.

En esta sucesión *intra-*, *inter-* y *trans-* coexisten de manera muy notable tres propiedades fundamentales. La primera de ellas es que dicha sucesión se encuentra en todas las disciplinas (con velocidades diferentes en los procesos de formación o con diferencias en las circunstancias históricas, según la complejidad de los dominios respectivos), con la misma regularidad en el orden de sucesión, como veremos en los capítulos siguientes. El segundo aspecto sorprendente es que no se trata de un proceso específico del pensamiento científico, sino que, en los estudios de la psicogénesis del desarrollo conceptual en el niño, se encuentra el *mismo orden de sucesión* y en función de los *mismos mecanismos* (cf. el capítulo siguiente). En tercer lugar, *cada etapa repite en sus propias fases el proceso total.* Este último punto exige una explicación más detallada, para la cual nos remitimos a los capítulos sobre el álgebra. Allí analizaremos también la profunda significación epistemológica que atribuimos a las tres etapas que hemos identificado, poniendo en evidencia el papel que desempeñan en el desarrollo del sistema cognoscitivo en todos los niveles.

CAPÍTULO IV
LA PSICOGÉNESIS DE LAS ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS[1]

Contrariamente a lo que hemos dicho acerca de la psicogénesis del *impetus* (noción anterior a la física moderna y con respecto a la cual hemos podido mostrar un paralelismo bastante detallado entre los períodos de la historia de este concepto y las fases de la psicogénesis) la evolución de la geometría rebasa en mucho todo lo que se observa en los estadios elementales. No obstante esto, vamos a intentar demostrar que los procesos de construcción que están en juego en dicho desarrollo intervienen ya en los comienzos, y que un mismo mecanismo funcional se encuentra así en el pasaje de una de las etapas a la siguiente, a pesar de tratarse de contenidos cada vez más ricos y de estructuras cada vez más fuertes.

1. El modo de construcción que corresponde específicamente al espacio presenta dos características propias. En primer lugar, existe un espacio de los objetos y una geometría del sujeto, y si bien la evolución de los conocimientos con respecto al espacio de los objetos depende naturalmente de los instrumentos construidos por el sujeto, con algunas retroalimentaciones, hay sin embargo allí dos desarrollos distintos. En segundo lugar, ambos espacios —tanto el matemático como el físico— pasan, en el curso de su evolución, por un período en el cual son concebidos como totalidades continuas, englobando al conjunto de las figuras en el primer caso (no sólo porque cada una de ellas depende de las propiedades generales de este espacio, sino ante todo, porque cada una de ellas constituye un sector del mismo), y conteniendo al conjunto de los objetos físicos en el segundo (porque cada uno de los objetos está contenido en este marco universal y permanente). Sin embargo, si bien hay allí un parentesco evidente, existe también una diferencia, que aparece incluso como oposición, y de la cual trataremos de precisar el significado real: después de su fase de totalización, en el espacio matemático se logra establecer una serie de diferenciaciones tales que la geometría se subordina progresivamente al álgebra, de tal manera que la noción de propiedades generales "del espacio" se desvanece para dar lugar a una multiplicidad de estructuras (seguramente coordinables pero que ya no constituyen un

[1] Para los detalles de los resultados experimentales que se analizan en este capítulo, con respecto al espacio geométrico, véase: J. Piaget, B. Inhelder y A. Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant*, París, PUF, 1948; J. Piaget y B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, París, PUF, 1948.

espacio único). Pero también (y en aparente oposición con dicha declinación de "la geometría" como disciplina separada) se asiste a una geometrización creciente y fecunda de la física, como si los objetos que hasta entonces estaban contenidos *en* el espacio recibieran de él sus propiedades más significativas.[2]

2. En esta doble evolución de los espacios físico y matemático, las etapas superiores resultan de la necesidad general de explicar las formas por medio de transformaciones (como invariantes de dichas transformaciones). Se torna posible entonces reconocer desde la psicogénesis ciertos procesos correspondientes. Se podrá así precisar el mecanismo constructivo y reconocer en este último el funcionamiento común que reencontraremos en el curso de la historia cuando se trate del paso de una etapa a la siguiente, cualesquiera que sean los enriquecimientos de contenidos y la complejidad considerablemente creciente de las estructuras.

La primera etapa de la psicogénesis del espacio corresponde a las relaciones intrafigurales. Limitándonos a la representación (y sin hablar aquí de la percepción) podemos comprobar desde los comienzos del dibujo la distinción entre figuras abiertas y cerradas, curvilíneas y rectilíneas, con ángulos rectos o no rectos, lados en cantidad variable, etcétera.

En cuanto a la oposición entre las propiedades intrafigurales e interfigurales, podemos ilustrarla con un claro ejemplo: dos rectas perpendiculares entre sí son fácilmente reproducidas porque forman una sola figura, mientras que el trazado correcto de las horizontales o verticales son muy tardíos porque obligan a recurrir a referentes externos: es así como las chimeneas sobre un techo inclinado son reproducidas en un comienzo por el niño (y aun en copia directa) como perpendiculares al techo y por consiguiente inclinadas, sin seguir la vertical.

A estas relaciones intrafigurales pueden agregarse aquellas que resultan de una comparación entre las propiedades internas de dos o varias figuras. Esto es muy diferente de lo interfigural porque se trata de la posición de las figuras en un espacio englobante cuya estructuración resulta necesaria en la medida en que presenta caracteres de totalidad. Por ejemplo, una vez que se ha descubierto que los tres ángulos de un triángulo forman, en conjunto, una "media luna" (180°), los niños de cierta edad llegan a prever muy rápidamente que lo mismo ocurrirá con otras formas triangulares, y llegan incluso a descubrir que los ángulos de un cuadrado darán, en conjunto, "una luna entera". También podemos considerar algunos lugares geométricos como intrafigurales, como por ejemplo cuando los niños en-

[2] J. Piaget y R. García, *Les explications causales*, París, PUF, 1971, EEG 26 (véase la segunda parte: "Explications physico-géométriques et réductionnisme", por R. García y J. Piaget).

cuentran que colocando una serie de objetos a igual distancia de un muñequito se obtiene un círculo. Por el contrario, es más difícil para los sujetos descubrir que los puntos a distancias iguales de dos jugadores no se reducen a un solo punto a distancia intermedia en la recta que los une, sino que ocupan toda la recta perpendicular en dicho punto, prolongándose tanto como uno quiera en ambas direcciones. En este caso, la construcción de esa perpendicular supone una organización de todo el plano, y pertenece por consiguiente al tipo de relaciones interfigurales.

Debe notarse, sin embargo, que si bien este comienzo de estructuración geométrica a partir del intrafigural está de acuerdo con el desarrollo histórico, uno de nosotros había hecho observar hace ya mucho tiempo que, contrariamente a la historia pero en conformidad con un orden teórico, las primeras formas espaciales consideradas por los niños son de naturaleza topológica, y que sólo posteriormente llegan a las figuras euclidianas y proyectivas. Así, por ejemplo, sólo hacia los 4 años logran copiar cuadrados. Antes de esa edad los representan por curvas cerradas (en oposición a cruces u otras formas topológicamente distintas), pero además saben dibujar un círculo interior o exterior a la curva, o bien en la frontera ("entre afuera", como dicen algunos de los pequeños). Debe señalarse, no obstante esos resultados que siguen siendo válidos, que es dentro del intrafigural donde hay una inversión de orden histórico. Las etapas interfigural y transfigural son mucho más tardías, y es necesario distinguir entre el plano de las acciones donde se sitúan esas primeras intuiciones topológicas (como en la copia de figuras), y el plano de las tematizaciones donde se razona sobre las figuras. En este último caso, el juego de los morfismos sobre vecindades y envolventes topológicos está lejos de ser primitivo.

3. El pasaje de las relaciones intrafigurales a las interfigurales se debe, en el curso de la psicogénesis, a tres factores principales: *i*] homogeneización de los espacios vacíos y llenos; *ii*] coordinación de las direcciones y de las distancias en dos o tres dimensiones; *iii*] localización de los móviles en caso de desplazamientos.

Los espacios vacíos y llenos presentan por sí mismos un curioso problema. Veamos un ejemplo. Se sitúan sobre una mesa arbolitos de pocos centímetros de altura a una distancia de 20-30 cm entre sí. Luego se le pregunta al niño si la distancia sigue siendo la misma en caso de que se coloque entre los árboles un muro de 2 o 3 cm de espesor. Sólo hacia los 7 años, aproximadamente (comienzo del estadio de las operaciones concretas), esta distancia permanece sin cambio para el niño; la idea que tienen antes es que ha disminuido (¡y no aumentado, como pudiera creerse!) por el hecho de que el espacio "llenado" por el espesor del muro no tiene el mismo valor de alejamiento que el espacio vacío. "Si usted hace un agujero en el muro —respondieron

ciertos niños— nada cambia, pero si tapa el agujero, la distancia disminuye." Esto nos ha permitido usar la técnica del agujero libre o tapado como control de la experiencia. Esta heterogeneidad de los espacios vacíos y llenos muestra claramente la ausencia inicial de un espacio general concebido como continente con respecto a los objetos o simplemente a las figuras que se trata de relacionar.

En lo que respecta a dicho espacio, examinemos los problemas de distancias o de direcciones cuando intervienen dos o tres dimensiones. Por ejemplo, presentamos al niño dos hojas de papel idénticas. Sobre una de ellas marcamos un punto en la parte superior, no lejos del vértice de uno de los ángulos, y pedimos al sujeto que reproduzca otro punto sobre la otra hoja, pero exactamente en el mismo lugar. Los más pequeños se contentan naturalmente con una estimación a simple vista, pero cuando llegan a las mediciones se limitan a trazar una línea única y oblicua que una el punto con el vértice más próximo. Cuando comprueban que el punto obtenido está situado o muy alto o muy al costado, los niños recomienzan sin comprender la insuficiencia de esta medida oblicua, para luego remplazarla por una nueva medida única ya sea horizontal o vertical. Esto dura un largo período. No es sino al nivel de las operaciones concretas (7-8 años) que comprenden de inmediato la necesidad de dos medidas conjuntas para fijar la posición del punto, lo cual equivale a hacer corresponder, como Descartes y Fermat, a todo punto del plano, un par de números. Hay pues allí una conducta que implica las coordenadas cartesianas, pero naturalmente sólo al nivel de las acciones, sin tematización.

Otro procedimiento para estudiar sistemas de referencia consiste en presentar a los sujetos un paisaje o un pueblito (pequeños edificios dispuestos sobre una mesa según diversas relaciones de distancias entre posiciones) y pedir que lo reproduzcan sobre otra mesa: se obtiene así una jerarquía de conductas que van desde simples alineamientos hasta las estructuraciones correctas; estas últimas son sin embargo tardías cuando se trata de múltiples elementos y no de un solo punto como en el ejemplo anterior.

Si consideramos las direcciones, resulta claro que el trazado de una vertical o de una horizontal requiere sistemas de referencia que exigen relaciones interfigurales, en oposición con el trazado de perpendiculares cualesquiera, situación de la cual nos hemos ocupado más arriba. Es cierto que se trata de nociones relativas al espacio de los objetos físicos, pero una vez admitido que una pequeña superficie de agua es horizontal y una plomada es vertical, queda aún por reconstruir estas líneas en los casos en que no son simples copias (las cuales son, por otra parte, ya difíciles para los más pequeños). En lo que respecta a las horizontales, la experiencia más ilustrativa consistió en hacer indicar con un trazo azul la superficie que presenta el agua coloreada en un frasco transparente que es sometido a inclina-

ciones diversas (ocultando el agua pero presentando un dibujo con la misma inclinación sobre el cual el niño marca el trazo). Hasta los 8-9 años el niño permanece tan apegado a los solos referenciales intrafigurales que llega incluso a trazar vertical la superficie del agua cuando el frasco está acostado, puesto que así conserva la posición inicial de la superficie paralela al fondo plano del recipiente. En otras situaciones, el sujeto se refiere a los ángulos del frasco o a otros referentes del mismo, pero no se le ocurra utilizar los referentes exteriores, tales como la superficie de la mesa o la de un soporte situado entre ella y el frasco. En lo que concierne a la vertical, se hace dibujar una plomada pendiente de una pared vertical u oblicua; en este último caso las dificultades subsisten también hasta edades similares.

Un tercer conjunto de factores que conducen al sujeto a considerar las relaciones interfigurales son los vinculados con la representación de desplazamientos (de la misma manera que Oresme y los hombres del Merton College estuvieron sobre la vía que condujo a la geometría analítica cuando se abocaron a las descripciones geométricas del movimiento). Una de nuestras experiencias[3] consistió en presentar dos reglitas *A* y *B*; la primera de ellas empujaba perpendicularmente a la segunda en medio, o bien en uno de los extremos, lo cual engendra, en el segundo caso, una rotación parcial. El simple empuje de *A* sobre el centro de *B* es naturalmente comprendido muy pronto puesto que *B* es simplemente desplazado en la prolongación del movimiento de *A*. Por el contrario, la previsión de la rotación de *B* en el caso en que *A* empuja sobre un extremo, no llega a ser general sino a los 7-8 años y bajo una forma que permanece muy global, es decir, sin las dos precisiones siguientes que sólo serán adquiridas a los 10-12 años: *1*] no hay todavía composición de movimientos de traslación con los de rotación en lo que concierne a los desplazamientos del extremo de la regla; *2*] los desplazamientos de *A* y de *B* son puestos en referencia global entre sí, pero no aún con respecto a su soporte inmóvil (cartón o madera). En estos dos casos lo que falta es la coordinación de dos sistemas (traslaciones y rotaciones, o los dos sistemas, interno y externo, de referencia). Para que esta coordinación pueda efectuarse, las relaciones interfigurales deben de acompañarse de transformaciones interdependientes que se convierten así en transfigurales (tercer nivel de esta psicogénesis).

Recordemos también, a propósito de las relaciones interfigurales relativas a los desplazamientos, el carácter tardío de la conservación de las longitudes en caso del desplazamiento de la regla *A* paralelamente a la regla *B*, con ligero rebasamiento de *A*. En tal caso, hasta

[3] J. Piaget y colab., *La direction des mobiles lors de chocs et de poussées*, París, PUF, 1972, EEG 28, cap. 5.

los 8 años aproximadamente los niños piensan que *A* se alargó, y el intervalo *aA*-*aB* (donde *a* marca el punto de llegada de *A*, y el extremo de *B* rebasado por *A*) es considerado como más grande —a pesar de los "observables" perceptivos— que el intervalo *eB*-*eA* (donde *e* es el extremo posterior de *B* y el de *A* después del desplazamiento). Hay pues aquí indiferenciación entre desplazamiento y alargamiento, aunque las relaciones interfigurales de posiciones *en* el espacio no sean modificadas sino por un pequeño desplazamiento.

4. Esta no conservación inicial de las longitudes nos conduce a examinar más de cerca las fronteras entre las relaciones interfigurales y transfigurales, es decir, entre el nivel examinado aquí y aquel en que las entidades geométricas serán objeto de dos transformaciones estructurales a la vez. Recordemos que la construcción de las coordenadas cartesianas abrió históricamente, de manera inmediata, la posibilidad de estudiar las curvas algebraicas correspondientes a los polinomios, así como la solución geométrica de las ecuaciones del álgebra. Por tal razón, sólo haremos comenzar el período de las relaciones transfigurales a partir del momento en que intervienen transformaciones en el seno de las estructuras totales algebraico-geométricas, y no en el interior de figuras simples, y donde el "espacio" en tanto continente general, cede su lugar a esas estructuras múltiples, coordinables entre sí pero bien diferenciadas. Es normal, por consiguiente, que en el plano de la psicogénesis reservemos la etapa correspondiente a las relaciones transfigurales para el nivel en el cual se dan estructuras relativamente complejas, como los dobles sistemas de coordenadas, las relaciones proyectivas entre objetos diversos, etc., y no las hagamos comenzar con las transformaciones de las figuras simples.

Sin embargo, debemos considerar el estatus de dichas transformaciones elementales, para lo cual retomaremos el ejemplo de la conservación de longitudes donde la transformación está dada por el desplazamiento. Partiremos de dos observaciones básicas: todo cambio de forma de una figura se debe a desplazamientos de las partes, y todo desplazamiento puede traducirse en relaciones interfigurales puesto que se trata de comparar posiciones iniciales y finales con sus referentes respectivos. En este caso, cualquier figura sometida a cambios de forma constituye un referencial que comprende sus formas inicial y final, mientras que las partes desplazadas en el seno de este referencial representan, en el estado que estaban en el punto de partida y en el estado al que arribaron, las figuras o subfiguras entre las cuales se establecen las relaciones interfigurales. Por tal razón, cuando el sujeto centra los razonamientos sobre estas relaciones interfigurales internas con respecto a dicho referencial limitado, está todavía en la etapa interfigural y no recurre aún a las composiciones o transformaciones de estructuras totales que caracterizan la etapa transfigural.

El caso más simple de estos cambios de forma de las figuras es aquel en el cual las partes de la misma son solamente desplazadas, sin otra modificación. Un par de experiencias simples son ilustrativas a este respecto. Se toma un cuadrado dividido en cuatro subcuadrados iguales, que luego se disponen en un rectángulo, y se interroga al sujeto acerca de la conservación de la superficie total. Análogamente, se toman cuatro cubos, que primero se reúnen formando un gran cubo y luego se disponen en forma de torre, y se trata de saber si el volumen se conserva. Pues bien, aun en casos tan simples, se comprueba que los sujetos más pequeños, que permanecen en el estadio intrafigural, no aceptan la conservación de la superficie o del volumen (tanto como niegan la conservación de la longitud en el caso de las reglitas descrito más arriba). Es necesario esperar hasta el nivel interfigural con sus sistemas elementales de referencia, para que estos invariantes sean alcanzados.

En el caso en que el problema no se refiere a simples figuras geométricas sino a objetos físicos con sus propiedades espaciales viculadas a las masas e indisociables de un contexto espacio-temporal, las reacciones son exactamente las mismas.[4] En efecto, sea que se trate del alargamiento de una bola de plastilina transformada en una salchicha, o del transvasamiento de un líquido a otro recipiente más estrecho y más largo, los trozos o partes del objeto son solamente desplazados. Sin embargo, cuando el sujeto permanece en el nivel de las relaciones intrafigurales, en lugar de razonar en términos de desplazamientos con sus relaciones interfigurales, no admite la conservación de las cantidades de materia, del peso o del volumen, como si los desplazamientos fueran acompañados de incrementos o de pérdidas absolutas.

Tales reacciones, sea que se trate de casos puramente geométricos o espacio-físicos, permiten deducir que la principal característica del desplazamiento, concebido en forma interfigural, es lo que en epistemología genética llamamos *conmutabilidad*,[5] es decir, la equivalencia entre lo que es agregado al término del desplazamiento y lo que es sustraído en el punto de partida. Los sujetos más pequeños se centran sobre el punto de llegada y sólo ven producción o incremento absolutos, sin pensar en lo que se sustrajo al comienzo. Cuando llegan a la conmutabilidad, los desplazamientos son reducidos a simples cambios de posición. De allí la compensación entre los agregados y las

[4] J. Piaget y colab., *Recherches sur la contradiction*, París, PUF, 1974, 2 vols., EEG 31 y 32, vol. 2, cap. 11 [*Investigaciones sobre la contradicción*, Madrid, Siglo XXI, 1978].

[5] B. Inhelder, A. Blanchet, A. Sinclair y J. Piaget, "Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues", Année psychologique, 75, 1975, pp. 23-60.

supresiones o, dicho de otra manera, la constitución de invariantes a través de las modificaciones de la forma figural. Por otra parte, cuando es la figura total la que resulta desplazada (con referencia a un marco exterior) y no una cualquiera de sus partes, la conmutabilidad es referida solamente a la totalidad como tal, cuyo cambio de posición global no modifica las distancias entre las partes; si la figura es un objeto físico, se trata en ese caso de un "sólido indeformable". Esta noción, por muy evidente que pueda parecer, no es reconocida (como ya lo hemos dicho en la Introducción) por los niños antes de que lleguen a lo que ahora consideramos como el nivel de las relaciones *inter-*, y no *intra-*figurales así como a la adquisición de la conmutabilidad. En efecto, esta noción supone que el sólido indeformable ocupa, al término del desplazamiento, un lugar equivalente al que dejó libre al comienzo. Por el contrario, en el caso de modificaciones de la figura, la posición de la totalidad no entra en juego, pero sí el desplazamiento relativo de las partes con respecto a la totalidad inicial que se convierte así en sistema de referencia.

En lo que concierne a las transformaciones afines de una figura aislable, se han estudiado las modificaciones de un rombo por medio de un dispositivo llamado "tijeras de Nüremberg" que permite transformar en forma continua un rombo "aplastado" lateralmente en un rombo aplastado longitudinalmente, pasando (a mitad de camino) por un cuadrado apoyado en un vértice. Los sujetos más pequeños esperan simplemente un agrandamiento o empequeñecimiento absoluto de la figura sin conservar el paralelismo. Sólo más tarde llegan a concebir las transformaciones correctas. Estas últimas son concebidas entonces como un juego de compensaciones entre el alargamiento de la diagonal más pequeña y el acortamiento de la más grande, así como el agrandamiento y la disminución de los dos pares de ángulos, situando las modificaciones de la totalidad con respecto al referencial exterior (sin rotación de la figura); hay pues allí una serie de correspondencias interfigurales, con conmutabilidad ampliada en el sentido de estas compensaciones.

Las transformaciones proyectivas son comprendidas y anticipadas en el mismo nivel que las conservaciones precedentes, cuando se trata de perspectivas relativas a un solo objeto, mientras que las relaciones entre puntos de vista relativas a varios objetos son más complejas y conciernen a modificaciones transfigurales que se aplican a una estructura total. En lo que respecta a un único objeto, se lo puede hacer girar o alejar, o referirlo a los movimientos del propio sujeto. Las relaciones proyectivas elementales se relacionan pues con los puntos de vista, es decir con las posiciones y distancias del sujeto con respecto al objeto. Dicho esto, resulta claro que las modificaciones aparentes de este último con respecto a los puntos de vista, sean también dominadas al mismo nivel. En tal sentido, es notable comprobar que se pueden reen-

contrar las etapas de una evolución análoga a la precedente.

En efecto, en un comienzo no hay ninguna previsión de cambio, puesto que el objeto es lo que es; el punto de vista del sujeto es ignorado como tal. Hay luego un cierto descubrimiento empírico o comienzo de previsión de una modificación, a partir del cual la transformación es concebida sólo como una especie de alteración absoluta, sin comprensión de compensaciones. Es así como un disco o un reloj presentado horizontalmente son dibujados como una media luna, mientras que un lápiz colocado oblicuamente o "parado" es dibujado como medio lápiz. En ambos casos ¡no se ve la totalidad! Cuando, por el contrario, comienzan a comprenderse las relaciones, éstas obedecen a leyes de compensación: las partes del objeto que en una rotación se tornan invisibles son remplazadas por partes que eran invisibles y que ahora se tornan visibles (delante o detrás, arriba o abajo). En cuanto al alejamiento, hay empequeñecimiento del objeto con la distancia, pero agrandamiento si ésta disminuye. En estos casos hay nuevamente construcción de relaciones interfigurales en función de los referentes, pero esta vez relativas a puntos de vista. Encontramos así un juego de compensaciones comparable a una conmutabilidad ampliada.

Con respecto a las similitudes, podría pensarse que se pudiera decir lo mismo. Sin embargo, el invariante que está en juego en dicho caso consiste en proporciones, es decir, relaciones entre relaciones. Encontramos aquí, por consiguiente, una dificultad considerablemente mayor y la solución sólo es accesible al nivel transfigural, entre 11 y 12 años.

5. Nos queda aún por caracterizar las diferentes formas de lo que hemos designado anteriormente con el término un tanto amplio de "compensaciones", así como buscar el carácter común de las diversas conmutabilidades que permiten al sujeto comprender dichas compensaciones y, finalmente, oponerlas a las composiciones y operaciones que resultan posibles al nivel transfigural.

En primer lugar, debemos distinguir las compensaciones por inversiones y por reciprocidades. Las primeras intervienen en caso de supresiones, las cuales son compensadas por agregados en otros puntos; es el caso de un desplazamiento simple donde el lugar dejado vacío por el móvil al comenzar el movimiento, equivale al lugar ocupado a su llegada. En cuanto a las reciprocidades, la compensación resulta de la reversión del sentido del recorrido: una modificación por una función creciente será compensada en la dirección decreciente.

Por otra parte, debemos distinguir entre lo que es inversión para el objeto o para el sujeto, según los puntos de vista de este último con respecto al objeto: en los casos de cambio de perspectiva, intervienen inversiones para el sujeto cuando lo que era invisible se torna visible o viceversa, pero las relaciones delante-detrás o arriba-abajo, son sólo reciprocidades para el objeto. En cuanto a las reciprocidades para el

sujeto, conviene además diferenciar las que se refieren a magnitudes o distancias —como cuando el objeto se empequeñece con el alejamiento y, recíprocamente, se agranda con el acercamiento— de las que se refieren a las formas: así, por ejemplo, el círculo percibido oblicuamente aparece como una elipse (sin que ningún diámetro del objeto haya disminuido realmente), y recíprocamente vuelve a la forma circular cuando se modifica adecuadamente la posición.

En cada una de estas modificaciones interfigurales se observa que el progreso cognoscitivo obedece a la misma ley: el sujeto comienza por comprobar solamente los resultados, sin comprenderlos como ligados a transformaciones sistemáticas; sólo logrará dominar dichas transformaciones a partir del momento en que se dé cuenta de las compensaciones posibles. La cuestión consiste pues en precisar por qué medios descubrirá estas últimas. Es a este propósito que el proceso de conmutabilidad parece constituir un intermediario necesario y que actúa en forma generalizable. En sus comienzos, la conmutabilidad se reduce simplemente a vincular el estado final de un cambio cualquiera a sus estados iniciales o, más precisamente, a subordinar la noción de estado a la noción de su formación. Pero por muy fácil que esto parezca, este cambio de dirección constituye un verdadero problema puesto que toda acción, ejecutada o comprobada, está orientada hacia su objetivo y no presta atención a su punto de partida. La conmutabilidad es pues una inversión de sentido que constituye ya un comienzo de construcción. Pero debemos agregar que, para llegar a la transformación, esa reversión debe desenvolverse en continuidad, y no sólo evocar el punto de partida como algo meramente estático (a eso se limitan los niños más pequeños cuando comparan sin más un estado final con el estado inicial, y concluyen que no hay conservación). Es entonces de la comprensión del desarrollo del proceso de donde surge una comparación de sentido opuesto al movimiento, que conduce a la compensación y caracteriza el segundo aspecto de la conmutabilidad: lo que cambia o se pierde en el curso de la modificación es compensado o compensable por lo que se gana, y recíprocamente.

En pocas palabras, la conmutabilidad aparece como el punto de partida de las transformaciones operatorias reversibles, las cuales se afirman ya cuando se trata de las modificaciones de una figura aislable, al nivel de las relaciones interfigurales. Luego, cuando se trata de la composición de resultantes de dos sistemas distintos, como veremos a propósito de las relaciones transfigurales, dichas transformaciones operatorias conducen a una forma de cálculo.

6. Cuando dos sistemas se componen en una estructura total (como por ejemplo los desplazamientos que corresponden a variaciones simultáneas con respecto a dos sistemas de referencia o de coordenadas, o más simplemente, en el caso de composición de rotaciones y

traslaciones, o de vectores con magnitudes y direcciones diferentes) las transformaciones elementales sobre la base de la conmutabilidad resultan insuficientes y es necesario combinarlas. Estas composiciones, dirigidas en un principio por las verificaciones, son luego anticipadas o deducidas, y toman entonces la forma de un cálculo. En el caso de las longitudes, cuando éstas son expresadas por números, dichas anticipaciones o deducciones adquieren una dirección algebraica, como en el caso de las proporciones.

Veamos el ejemplo de los movimientos relativos. Un caracol puede circular sobre una placa en uno u otro sentido, y se puede hacer avanzar o retroceder aquélla con respecto a un objeto exterior inmóvil que sirve como punto de referencia. Los problemas que se presentan al sujeto consisten en prever las diferentes posiciones del animal con respecto a dicho objeto, según las combinaciones de ambos tipos de movimiento y, en particular, qué hay que hacer para que el caracol permanezca frente al referente cuando se mueve la placa. Otro problema consiste en comparar los tiempos durante los cuales tres pasajeros permanecen en un túnel si dos de ellos recorren el tren en sentidos contrarios entre sí, y un tercero permanece sentado. Por muy simples que parezcan estos problemas, no son resueltos sino en nuestro último nivel (11-12 años), debido a la necesidad de establecer composiciones entre ambos sistemas de movimiento.[6] Por el contrario, tan pronto como se adquiere esta coordinación, da lugar a una relativización de las nociones que rebasa las transformaciones observables. Así, por ejemplo, se plantea el problema de saber quién verá más ciclistas en un cierto intervalo de tiempo (los ciclistas pasan a razón de uno por minuto): ¿una persona sentada delante de la puerta de su casa; otra que marcha en el mismo sentido que los ciclistas; o una tercera que va en sentido contrario? Algunos sujetos que encuentran la solución hacen afirmaciones como las siguientes: "Es como si la persona quedara en su lugar y el ciclista pasara más rápido." No es ésta, por cierto, una relatividad del mismo calibre que la utilizada por el joven Einstein cuando preguntó a un inspector estupefacto, en un tren, "¿cuál es el nombre de la estación que ha venido a detenerse junto al tren?". Pero es, sin embargo, una trasposición correcta de relaciones en cuanto a un cálculo lógico de equivalencias.

El problema que presentan estos primeros hechos, y que rencontraremos en todos los otros casos, consiste en comprender por qué estas composiciones de movimientos son tan tardías, siendo que la comprensión de los movimientos componentes es elemental. En efecto, aquí sólo se trata de traslaciones. El caracol *C*, por ejemplo, puede desplazarse en un sentido según el movimiento $+A$, o en el

[6] J. Piaget, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, París, PUF, 1946, cap. 8.

otro $-A$; lo mismo que la placa P puede moverse hacia $+B$ o hacia $-B$. Hay cuatro combinaciones $+A+B$, $+A-B$, etc., que se diferencian en 12 según que se tenga $A = B$, $A > B$ o $A < B$. Pues bien, si estos movimientos fueran sucesivos y si la pregunta fuera por ejemplo: "Si el caracol hiciera un camino $+A$ sobre la placa, y si tuviera que llegar junto a tal marca (exterior), ¿qué es lo que deberíamos hacer entonces con la placa?", el niño no tendría la menor dificultad en ninguna de las 12 situaciones. ¿Cómo explicar entonces que si estas traslaciones $+A$ y $+B$ son simultáneas en lugar de ser sucesivas, el problema se complica hasta el punto de provocar un retraso de algunos años para obtener soluciones inmediatas? La diferencia entre un caso y otro se aclara si se observa que, desde el punto de vista de las figuras en el espacio, la composición de dos movimientos simultáneos no puede formar de por sí una sola figura sino por medio de un dibujo animado. En efecto, un solo desplazamiento corresponde a una figura, estática en su trayectoria, o bien cinética (si se la sigue con la mirada, de hecho, o en pensamiento). Por el contrario, dos traslaciones simultáneas son imposibles de seguir, aun cuando estén orientadas en el mismo sentido, puesto que cada una de ellas es continuamente modificada por la otra en el logro de su objetivo, conservando, al mismo tiempo, su carácter propio. La noción de "transfigural" toma de aquí su significación epistemológica: lo que no puede ser comprobado directamente y tiene que ser calculado.

Es cierto que las relaciones interfigurales suponen ya dos figuras, pero sólo son comparadas como estados a vincular por una transformación (ella misma figurable). En el caso de las transformaciones transfigurales, el problema es distinto: se trata de fusionar dos figuras en una sola; esta última no es perceptible y hay que construirla por composición de dos transformaciones en una sola resultante, lo cual exige un cálculo $(+A) + (+B)$ como intermediario. Es pues la elaboración de tal forma de cálculo lo que explica su retardo con respecto a las relaciones interfigurales. (No es éste el momento para hablar de la necesidad de coordinar dos sistemas de referencias, lo cual va de suyo en los ejemplos precedentes aunque permanezca implícito, pero veremos más adelante algunas manifestaciones explícitas de esta coordinación.)

Los hechos que siguen se refieren a la coordinación de traslaciones y de rotaciones. En estos casos, la resultante puede ser representada en una figura única, pero ésta no se da directamente en la inspección de los componentes sino que debe ser construida de nuevo por medio de inferencias. Un ejemplo claro es el de la cicloide que resulta de una composición de la rotación del círculo en su perímetro y de la traslación directamente observable de su centro. La cicloide se percibe tan mal cuando se observa avanzar una rueda, que los niños la remplazan primero por una serie de círculos sin otra conexión que

una unión por pequeños trazos, y luego por círculos contiguos cuya comparación interfigural sugiere el movimiento de conjunto, pero sin que se pueda comprender el pasaje de una rotación a la siguiente puesto que sólo hay yuxtaposiciones. Finalmente, construyen las conexiones, pero llegando a epicicloides por predominio de las rotaciones. Una vez más, es sólo a los 11-12 años que se logran las cicloides.

Una composición que parecería mucho más simple consiste en hacer avanzar una placa sobre un cilindro en rotación:[7] en este caso el trayecto de la placa es dos veces mayor que el trayecto del cilindro puesto que a la distancia recorrida por este último debe de agregarse el movimiento que él transmite a la placa. Observando la figura que describen en conjunto estos dos móviles, se percibe el avance del que es transportado por el otro, pero no se llega a ver que él recorre sobre el cilindro en rotación un camino igual al que éste recorre sobre la mesa. Nuevamente, en este caso no es la figura la que provee la comprensión, sino un cálculo (por simple que sea) cuya naturaleza es claramente transfigural.

Otra composición estudiada ha sido la de la espiral que se obtiene haciendo avanzar en línea recta un lápiz a lo largo de un cilindro en rotación. Las primeras soluciones consisten nuevamente en círculos ligados por segmentos de recta, luego en rectas oblicuas y paralelas antes de transformarse en curvas que finalmente se reúnen en espirales. En otro ejemplo, donde hemos utilizado el tornillo de Arquímedes y el movimiento de las ondas, no hemos tratado de hacer prever las resultantes a partir de las componentes, sino que pedimos el análisis de las componentes.[8] Para ello pegamos un trocito de papel sobre el tubo helicoidal que se hace girar en posición inclinada. Hasta los 7 años, aproximadamente, el niño cree que el papel subirá hasta la parte superior de ese "tornillo" en donde el agua va pasando de una vuelta de espiral a la siguiente. A partir de los 7 años, ya no se espera que el papel suba, pero el sujeto no logra ver que el agua asciende en cada vuelta. Sólo a los 11-12 años los movimientos componentes son descritos correctamente. Lo mismo ocurre con las ondas de una cuerda de 3 a 4 metros, o con las olitas producidas por la caída de una gota de líquido rojo en un pequeño recipiente con agua: en un principio, se supone que una cinta atada a la cuerda tendrá que avanzar y que la gota roja se propaga hasta los bordes con las olas; es nuevamente hacia los 11-12 años que la sinusoide de la onda es disociada de los ascensos y los descensos locales de los objetos ligados a ella que no avanzan.

[7] J. Piaget y colab., *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, París, PUF, 1977, 2 vols., EEG 34 y 35, vol. 2, cap. 12.

[8] J. Piaget y C. Fot, "Explication de la montée de l'eau dans un tube helicoidal", *Archives de psychologie*, *40*, 1965, núm. 157, pp. 40-56.

Estos problemas pueden parecer complejos, pero son todos resueltos al mismo nivel que los precedentes, lo cual muestra el parentesco general de los modos de composición en juego. Para analizarlos mejor, retomemos algunos casos aparentemente muy simples de coordinaciones entre traslaciones y rotaciones, pero donde la dificultad aparece claramente en forma de una puesta en relación necesaria de los sistemas de referencia exterior e interior al dispositivo cinético. Se trata nuevamente de las dos reglitas mencionadas en la sección (3), una de las cuales empuja perpendicularmente a la otra en uno de sus extremos y la hace girar.[9] Estos movimientos son descritos globalmente desde los 7-8 años en términos interfigurales; por el contrario, dan lugar a problemas transfigurales de solución claramente más tardía cuando se trata de describir en detalle las traslaciones y rotaciones de las extremidades de las reglas. A este respecto se han utilizado diversos dispositivos, de los cuales los dos principales están representados en la figura siguiente:



Uno de ellos no está articulado y sólo puede dar lugar a empujes, mientras que el segundo está articulado y permite tanto empujar como efectuar una tracción. Los problemas que se presentan con respecto a esta experiencia consisten en describir las etapas en la predicción y explicación de los resultados de esos empujes y tracciones, indicando con precisión las posiciones de las extremidades de las reglitas (especialmente las extremidades de *B*, una de ellas proximal —base de las acciones de *A*— y la otra distal o libre). En el caso del dispositivo articulado, la extremidad distal de *B* desciende cuando la proximal sube, y recíprocamente. Estas rotaciones son representables por medio de un sistema interno de referencia (relaciones entre *A* y *B*), mientras que las traslaciones exigen recurrir a un sistema externo (posiciones con respecto al soporte de las reglitas). De aquí resulta una serie de errores en la coordinación de unas y otras. No vamos a describirlos en detalle,[10] pero sí señalaremos el hecho notable de que hasta aproximadamente los 11-12 años los sujetos no logran, después de sus falsas predicciones, ni siquiera efectuar una descripción que constituya una lectura objetiva del proceso que se ha desarrollado

[9] J. Piaget y colab., *Réussir et comprendre*, París, PUF, 1974, cap. 6.

[10] V. Bang, P. Greco, J.B. Grize, Y. Hatwell, J. Piaget, G.N. Seagrim y E. Vurpillot, *L'épistémologie de l'espace*, París, PUF, 1964, EEG 18, cap. 5.

frente a él. Como los movimientos que están en juego son todos extremadamente simples, parece claro que la dificultad central consiste en componer en una sola totalidad los dos sistemas de referencia. Este problema general no llega a resolverse sino en el nivel habitual de las construcciones transfigurales porque supone la realización continua de multiplicación de relaciones.

A esta coordinación de sistemas de referencia corresponde, en el dominio proyectivo, la coordinación de los puntos de vista sobre un conjunto de varios objetos (como por ejemplo tres montañas de cartón cuyas posiciones relativas se tratan de prever cuando se las observa desde los cuatro costados de la mesa en la cual están situadas). En este caso, las relaciones a multiplicar entre sí son simplemente las de izquierda-derecha y de delante-detrás, con previsión de las partes visibles u ocultas. El problema que se presenta en este caso al niño parece tanto más fácil cuanto que no se le pide que haga un dibujo sino solamente que elija entre varias imágenes la que corresponde a cada una de las posiciones posibles. Pues bien, las previsiones son aquí tan difíciles como en el caso de los dos sistemas de coordenadas, y por las mismas razones relativas a la necesidad de una composición simultánea de las diversas relaciones en juego y, por consiguiente, de un cálculo lógico.

Con las composiciones vectoriales[11] se asiste a la constitución de un cálculo explícito pero, una vez más, sólo se llega a él en el último nivel, y después de largas fases de simples tanteos. Por ejemplo, un sujeto que ha previsto que dos fuerzas iguales y simultáneas que actúan paralelamente dan un máximo de rendimiento, mientras que si son opuestas se anulan, podrá concluir que hay una serie continua de efectos decrecientes, cuando se parte de la primera situación y se llega a la segunda, en la medida en que las direcciones se apartan.

Por otra parte, el problema inverso de la dirección en función de la intensidad es resuelto en el mismo último nivel. Si la resultante de dos fuerzas iguales, con una separación de 90°, por ejemplo, en sus direcciones, se sitúa sobre su mediana, el sujeto llega al fin a descubrir que, en caso de desigualdad en la magnitud de las fuerzas, cuanto más grande es la diferencia, tanto más próxima estará la resultante de la fuerza mayor: se trata, de hecho, de la ley del paralelogramo de las fuerzas, pero por cálculo simplemente lógico o lógico-geométrico.

Con las proporciones, finalmente, llegamos a un cálculo que es a la vez geométrico y numérico. Su aspecto espacial es descubierto con referencia a las semejanzas: construir un triángulo o un rectángulo exactamente de la misma forma que un modelo dado, pero n veces más grande. El aspecto numérico se impondrá, por ejemplo, en los problemas de velocidades en casos de trayectos sucesivos y no ya de

[11] J. Piaget y colab., *La composition des forces et le problème des vecteurs*, París, PUF, 1973, EEG 30.

movimiento sincrónicos a comparar perceptiblemente: si un móvil recorre tal espacio en 2 minutos, ¿dónde llegará después de 8 minutos? Por muy elementales que puedan parecer, tales proporciones no son generalizadas sino al nivel transfigural, puesto que constituyen relaciones de relaciones y también exigen, por consiguiente, coordinaciones entre sistemas distintos: *c* es a *d*, como *a* es a *b*.

7. En forma general, y cualesquiera que sean la multiplicidad y la diversidad de sus manifestaciones, las relaciones transfigurales son pues bien diferentes de las interfigurales. Estas últimas no consisten sino en situar figuras separadas en un mismo sistema espacial que las englobe: un espacio homogéneo e isótropo, un sistema de coordenadas o una estructura caracterizada por una sola especie de transformaciones (desplazamientos, afinidades, etc.), las cuales surgen del mecanismo general de la conmutabilidad que permite vincular los estados sucesivos de la figura transformada. Con las relaciones transfigurales, por el contrario, siempre se trata de componer en una sola totalidad sistemas distintos y, al mismo tiempo, de reunir en un conjunto simultáneo un cierto número de relaciones fáciles de establecer sucesivamente pero no dadas en su asociación en las figuras de las cuales se ha partido. En una palabra, lo propio de lo transfigural consiste en sustituir la descripción de las figuras por el cálculo, y aun cuando la resultante de estas composiciones pueda traducirse en una figura, ésta es nueva y debe de ser construida por deducción antes de dar lugar a una representación.

El mecanismo de estas construcciones espaciales sucesivas es entonces de una gran simplicidad aunque se presenta bajo tres aspectos diferentes y correlativos. El primero es el pasaje de los sistemas elementales —puesto que las relaciones intrafigurales constituyen ya sistemas, diferentes para cada figura—, a sistemas totales susceptibles de englobarlos no ya solamente a título de clases, sino de continentes continuos, lo cual es propio de un sistema espacial. Esto va seguido por el pasaje de dichos sistemas totales a coordinaciones de sistemas que ya no están caracterizados por relaciones de continente a contenido o por transformaciones sucesivas, sino por composiciones que vinculan, en un mismo acto, conexiones distintas entre sí.

El segundo aspecto de este mecanismo constructivo es indisociable del precedente: es el pasaje de las relaciones figurales a relaciones más abstractas en la medida en que constituyen relaciones de relaciones de diversos grados, como las proporciones (en tanto equivalencias entre relaciones, para atender luego a las birrelaciones o proporciones entre proporciones). Esta elaboración de relaciones complejas comienza ciertamente desde el dominio intrafigural, pero cuanto más elevado es el rango del sistema a construir, tanto más las conexiones en juego se alejan de lo espacial puro para combinarse con un cálculo lógico-aritmético, preludio de un álgebra general: desde que comienzan a

manejarse las coordenadas ortogonales en el plano, un punto se traduce por un par de longitudes expresadas en números, y los dobles sistemas de coordenadas exigen una lógica de relaciones frente a las cuales hemos visto las dificultades que surgen antes de los 11-12 años.

En cuanto al tercero de los caracteres de este mecanismo de conjunto, se trata precisamente del que provee el "motor" y da cuenta de los otros dos: es la necesidad de pasar de los estados de hecho a la comprensión de sus razones. En efecto, una forma espacial no se explica por sí misma, y en tanto forma aislada sólo puede ser objeto de una intuición figural: para llegar a la razón de sus propiedades es necesario primero subordinarlas a las leyes de la cantidad en general, para luego concebir la razón como resultante de las transformaciones. Es así que un axioma euclidiano, tal como "si se restan cantidades iguales de dos cantidades iguales, quedan cantidades iguales", concierne a las cantidades algebraicas tanto como a las geométricas. (Señalemos, de paso, que hemos verificado, sobre dos superficies modificadas en forma diferente, que este axioma no lo capta el niño hasta el nivel interfigural.) Por otra parte, la suma de los ángulos de polígonos a los cuales se les aumenta el número de lados, no es comprendida sino cuando sus transformaciones son vinculadas a una ley de recurrencia (sin la cual el círculo de 360° correspondiente a los 4 ángulos de un cuadrado simplemente se hace más grande en el pentágono, en el hexágono, etc.). En resumen, la integración de los sistemas elementales en estructuras más y más fuertes se debe al hecho de que para comprender las formas hay que considerarlas como resultantes de transformaciones, y para comprender éstas hay que rebasar lo geométrico en la dirección de un cálculo posible, subordinando las magnitudes espaciales al dominio de las cantidades en general, puesto que aquéllas, sin éstas, son de carácter figural y no logran la necesidad interna propia de las estructuras lógico-algebraicas.

Si tal es el triple mecanismo constructivo del espacio en el curso de la psicogénesis, se ve de inmediato cómo puede dar lugar a reconstrucciones completivas y generalizadoras en todas las etapas de la historia de la geometría. Aun tomando en cuenta niveles superiores a partir del programa de Erlangen, se puede considerar que cada uno de los grupos fundamentales a los que Klein hace referencia da lugar a relaciones intra-estructurales; que sus filiaciones según un sistema de subgrupos constituyen relaciones inter-estructurales; y que los anillos y los cuerpos considerados luego por la geometría algebraica corresponden a etapas trans-estructurales. Los prefijos *intra-*, *inter-*y *trans-* se aplican así a estructuras de rango superior y no ya a figuras elementales.[12] Pero hablar de integración de sistemas simples en sistemas más ricos y más complejos sería más que trivial si estas genera-

[12] Volveremos sobre este punto en el capítulo dedicado a la psicogénesis del álgebra.

lizaciones, comunes a todos los niveles, no fueran acompañadas por ese fenómeno paradójico según el cual los progresos de la geometría conducen a una algebraización que la elimina como geometría, y que un conocimiento mayor del espacio conduce a su supresión en tanto "continente" general, para remplazarlo por estructuras o campos bien diferenciados. Estas paradojas que caracterizan el verdadero problema del desarrollo de la geometría, encuentran un modesto comienzo de correspondencia en el pasaje psicogenético de las relaciones interfigurales a las transfigurales, cuando los progresos de la abstracción reflexiva conducen a subordinar las verificaciones figurativas al cálculo y a las composiciones multirrelacionales. La razón de este desarrollo es, como hemos indicado más arriba, que a todos los niveles la intuición figural de las magnitudes espaciales no se torna comprensiva sino a condición de subordinarse a las leyes de la cantidad en general.

8. Nos resta sin embargo intentar una explicación del hecho siguiente: en sincronismo con la algebraización de la geometría, es decir, con el desvanecimiento progresivo del "espacio" matemático en tanto entidad unitaria y general, se asiste a una fisicalización y aun a una dinamización de la geometría de los objetos, con eliminación correlativa de un "espacio" físico unitario en tanto "continente" general de todos los fenómenos. También aquí, y a pesar de que tal tentativa involucre una aparente temeridad (que pudiera ser tildada de ingenuidad), creemos que el punto de vista psicogenético puede contribuir en parte a la solución de este problema.

Las razones que tenemos para tal afirmación son, a nuestro juicio, simples y evidentes. En primer lugar, es necesario recordar que el conocimiento no empieza ni con una toma de conciencia de las actividades del sujeto ni con una simple lectura de las propiedades de los objetos, sino por interacciones inicialmente indisociadas entre el sujeto y los objetos. Sólo posteriormente las dos direcciones se disocian: una de ellas, de interiorización, fundando las relaciones lógico-matemáticas sobre las coordinaciones internas de las acciones; la otra, de exteriorización, orientada hacia la objetividad física. Pues bien, las conexiones espaciales se sitúan precisamente en el centro mismo de estas interacciones iniciales indiferenciadas, ya que las acciones del sujeto se desarrollan en el espacio, y que la propiedad más elemental de los objetos es ocupar posiciones. El espacio constituye pues, desde sus formas más primitivas, el punto fundamental de encuentro entre las actividades del sujeto y los caracteres del objeto. Es natural entonces que la diferenciación progresiva (y muy lenta) entre las construcciones lógico-aritméticas y los conocimientos físicos priva al espacio de este privilegio exclusivo y lo somete a transformaciones que llegan finalmente a las dos exigencias complementarias y bipolares de una algebraización y de una fisicalización.

La indiferenciación de lo espacial y de lo lógico se presenta bajo una forma maximal en los niveles sensorio-motrices puesto que allí los conocimientos se reducen a un *saber hacer* que todavía no está conceptualizado, y cuyos únicos instrumentos consisten en movimientos y percepciones, es decir, en acciones efectuadas materialmente. Esto no obsta para que la inteligencia sensoriomotriz involucre estructuras que están constituidas por los esquemas de acción y sus coordinaciones. Pero estos esquemas, a pesar de presentar las propiedades lógicas de identidad, de equivalencia, etc., inherentes a toda generalización, permanecen evidentemente espaciales por ausencia de todo pensamiento o representación conceptuales. Lo mismo ocurre con las coordinaciones, ya que las relaciones de orden, las imbricaciones o las correspondencias que las caracterizan se refieren a las acciones materiales que se desarrollan en el espacio.

Cuando este esquematismo indisociablemente lógico y espacial se completa (entre los 2 y 7 años) con sistemas de conceptos cuya formación se hace posible gracias a la función simbólica o semiótica, hay un comienzo de diferenciación entre estos dos aspectos lógico-aritmético y geométrico del pensamiento naciente que luego se va desarrollando. Es instructivo comprobar, a este respecto, cuán largo es el tiempo durante el cual los conceptos y los números conservan un carácter espacial. Un ejemplo que es ya conocido: una fila de *n* objetos podrá ser numerada bien por un niño, pero si se alarga la fila por simple aumento de la distancia entre los objetos (sin ningún agregado), creerá que hay entonces un número de objetos mayor que *n*. Asimismo, las primeras clasificaciones se basan en parte en las relaciones de semejanzas y diferencias, pero exigen además que las colecciones como tales posean una figura espacial de conjunto (colecciones figurales) sin diferenciación entre la extensión y la comprensión.

En el nivel de las operaciones concretas (entre 7-8 y 10-11 años) la diferenciación de las estructuras lógico-aritméticas y geométricas parece lograda en tanto aparecen dos sistemas isomorfos, pero distintos, de operaciones: relaciones lógicas, fundadas en similitudes y diferencias; y relaciones infralógicas fundadas en relaciones de vecindad y en el continuo. Pero en tanto que las primeras son "concretas" (es decir, que su utilización exige la manipulación de los objetos) dichas operaciones comportan todavía desplazamientos en el espacio y, por consiguiente, un residuo importante de aspectos espaciales. No es sino al nivel hipotético-deductivo (a partir de los 11-12 años) que las estructuras lógico-matemáticas se liberan enteramente de lo geométrico. Pero es precisamente entonces cuando se instala la fase "transfigural" de la geometría del sujeto, es decir, el comienzo de una algebraización por modesta que sea.

De este desarrollo psicogenético se desprenden tres consecuencias esenciales:

a] La primera es que, dado el origen común de las estructuras lógico-aritméticas y geométricas a partir de las acciones sensorio-motrices, el espacio permanece a todos los niveles como un mediador necesario (aunque no suficiente) entre el sujeto y los objetos. Es ésta la razón por la cual, aun en física teórica, las estructuras de grupo, por ejemplo, sirven para explicar los fenómenos que conservan una dimensión espacial, puesto que dondequiera que haya movimiento —real o virtual— interviene algún "campo" con su dominio de acción.

b] La segunda, que deriva igualmente de este origen común, es el isomorfismo de la geometría del espacio de los objetos, en sus diversas variedades, y de ciertos aspectos de la geometría del sujeto (en un comienzo sometida a aquélla, pero deviniendo más y más rica). En efecto, mientras que el sujeto sólo procede por aproximaciones sucesivas en sus reconstrucciones deductivas de la dinámica de los objetos, sin estar jamás seguro de haber llegado al límite, los caracteres espaciales de la experiencia son transparentes para la razón en la medida en que permanecen geométricos.

c] En cuanto a la tercera, resulta del hecho de que, a partir de un origen común referido a las interacciones iniciales entre el sujeto y los objetos, hay luego diferenciación de los conocimientos en las dos direcciones opuestas: las coordinaciones internas de la acción, fuente de las estructuras lógico-aritméticas, y las conexiones entre objetos, que se orientan hacia los conceptos físicos. En este caso, el espacio que constituye el lugar o medio común de todos los conocimientos sensorio-motrices, es rebasado por los dos extremos, en el sentido de la interiorización por las estructuras lógico-aritméticas o algebraicas, y en el sentido de la exteriorización por la dinámica de los objetos. La geometría del sujeto y la de los objetos cesan entonces de confundirse parcialmente, para disociarse, pero simétricamente, la primera en el sentido de una algebraización y la segunda de una fisicalización o dinamización. En los dos casos, el espacio cesa de desempeñar el papel de "continente" general, para diversificarse en estructuras matemáticas particulares y en caracteres variados de "campos" físicos, soldándose así, de un lado tanto como del otro, a las partes no comunes del conocimiento, nacidas del doble movimiento solidario dirigido hacia los mecanismos internos de las actividades del sujeto y hacia la dinámica de los objetos. Esto no significa, repitámoslo una vez más, que las estructuras espaciales pierdan su papel de mediador entre el sujeto y los objetos, sino solamente que no serán las únicas en desempeñar ese papel por el hecho de que los conocimientos ya no se centrarán exclusivamente en los objetos exteriores.

CONCLUSIONES

Los mecanismos comunes que intentamos poner de manifiesto entre la psicogénesis y la historia de los conocimientos están referidos a los procesos de sucesión de los niveles, independientemente de su grado jerárquico absoluto. Nos resta, por consiguiente, buscar la significación de la secuencia *intra-*, *inter-*, y *trans*-figural, primero en sus caracteres generales, y luego específicamente espaciales.

1] Desde el punto de vista general, la sucesión *intra-*, *inter-*, y *trans-*, que rencontraremos en todos los dominios y en todos los niveles, es la expresión de las condiciones que las leyes de asimilación y de equilibración imponen a toda adquisición cognoscitiva. Cada vez que el sujeto aborda un dominio nuevo, se encuentra en primer término con la obligación de asimilar los datos a sus propios esquemas (de acción o conceptuales). Que estos datos consistan en objetos, en figuras, en relaciones, etc., implica en su análisis una equilibración de forma elemental entre su asimilación a los esquemas del sujeto y la acomodación de éstos a las propiedades objetivamente dadas. De aquí surge el carácter *intra-* de estos comienzos de conocimiento. Pero los nuevos esquemas así construidos no podrían permanecer aislados: tarde o temprano el proceso asimilador conducirá a ciertas asimilaciones recíprocas, y las exigencias de equilibración impondrán a los esquemas o subsistemas así vinculados formas más o menos estables de coordinaciones y de transformaciones. De aquí surge el carácter *inter-* de esta segunda etapa. Pero una tercera forma de equilibrio tendrá lugar necesariamente, a su vez, puesto que la multiplicación de subsistemas amenazará la unidad del todo, mientras que las diferenciaciones obligadas serán contrarrestadas por las tendencias integradoras. El equilibrio que se impone entonces entre las diferenciaciones y la integración no podría lograrse sin alcanzar sistemas de interacciones tales que las diferenciaciones puedan ser engendradas, en lugar de estar sometidos a ellas, única manera de armonizarlas sin perturbaciones internas y sin que entren en conflictos entre sí. De aquí surgen las estructuras de conjunto, de carácter formador, que caracterizan el nivel *trans-*.

Va de suyo, sin embargo, que tales triadas (mucho más flexibles en su principio que las tesis, antítesis y síntesis de la dialéctica clásica, aunque se basen también en el papel de los desequilibrios y de reequilibraciones con rebasamientos) no son sino fases recortadas de un proceso continuo: las estructuras a las que se ha llegado en el nivel *trans-* dan lugar a su vez a análisis *intra-* que conducen a nuevos *inter-*, luego a la producción de superestructuras *trans-*, y así sucesivamente.

Si ese mecanismo es tan general y constantemente repetible, es entonces natural que lo encontremos en el paso de un nivel al siguiente en el seno tanto de la psicogénesis como de la historia, y esto indepen-

dientemente de la altura absoluta de los niveles considerados.

2] Pero la interpretación que acabamos de proponer sólo se refiere a los aspectos externos de la equilibración. Quedan por indicar los aspectos internos, es decir, el incremento de los coeficientes de necesidad propios a las formas sucesivas de verdad, que en nuestro caso son de carácter geométrico. Está claro, a este respecto, que la necesidad lógico-matemática es de fuente endógena y presenta valores maximales en el seno de los sistemas cerrados de transformaciones construidas por el sujeto. Los datos de fuente exógena, por el contrario, permanecen en estado de "hechos" con el mínimo de necesidad intrínseca. Desde este punto de vista, el pasaje de lo intrafigural al inter- y a lo transfigural corresponde a una extensión sistemática de la necesidad, pero debida a ese proceso fundamental de remplazo progresivo de lo exógeno inicial por las construcciones endógenas, lo cual es otro aspecto del proceso de equilibración analizado más arriba, pero solidario con el primero.

En este sentido, el caso de la geometría es doblemente particular desde el punto de vista de estas relaciones entre lo exógeno de los comienzos y las transformaciones endógenas. Por una parte, el espacio es a la vez una propiedad de los objetos y un producto de las construcciones posibles del sujeto, y esto constituye un factor que favorece lo exógeno, puesto que un sujeto que construye figuras, por ejemplo, imagina en general estarse conectando con realidades preexistentes, mucho más que estarse refiriendo a transformaciones sobre entidades abstractas libremente elegidas. Por otra parte, en función de sus generalizaciones, las construcciones endógenas del sujeto van a tomar, tarde o temprano, formas algebraicas. Las interacciones cada vez más complejas entre los instrumentos algebraicos que se construyen y las formas espaciales imaginadas para asegurar esta unión, han tenido por efecto prolongar el período interfigural y retardar el transfigural, dando lugar a desplazamientos en el tiempo que fueron difíciles de comprender por los contemporáneos, pero que son tanto más instructivos para el enfoque histórico-crítico de la epistemología.

3] Podemos, por consiguiente, representar como sigue la sucesión de nuestras tres etapas, consideradas bajo el ángulo de las formas de verdad exógenas y endógenas.

La forma inicial es, evidentemente, el realismo de las figuras, consideradas por una parte como existentes independientemente del sujeto (ya sea en el mundo físico o en el mundo de las ideas) y, por otra, como dadas en sí mismas sin resultar de una construcción, cualquiera que sea, que emane del sujeto. Este último puede ciertamente manipular las figuras e introducir en ellas ciertas modificaciones bajo la forma de disociaciones de partes o agregados, pero esto ocurre entonces con el objetivo de alcanzar siempre sus propiedades intrínsecas y no de construir un sistema de transformaciones del cual surja

la figura (salvo en el caso excepcional de las secciones cónicas que no se conectan sino parcialmente con un nivel interfigural). Dada esta perennidad estática de las figuras, que se imponen al sujeto desde afuera a título de "entidades" ya totalmente hechas, la noción de transformación en tanto fuente de nuevas construcciones no tiene significación para el realismo. En efecto, el modo de conocimiento determinado por esta concepción inicial de la verdad, en tanto pura adecuación, no podría ser sino de naturaleza intrafigural, y esto precisamente porque permanece involuntariamente, pero a menudo también intencionalmente, de carácter exógeno. En la medida en que el sujeto ignora sus propias operaciones o no busca en ellas ningún poder constructivo de verdad intrínseca, su papel no puede ser otro que someterse a las entidades permanentes dadas desde el exterior.

Con las organizaciones interfigurales, por el contrario, las construcciones endógenas comienzan a desempeñar un papel formador, en el sentido en que las "entidades" geométricas no se imponen ya simplemente desde afuera, sino que resultan solidarias de un conjunto de transformaciones y relaciones de las cuales ellas participan, aun cuando ellas mismas se deban a los instrumentos operatorios del sujeto (a partir de aquí concebido como fuente de un saber objetivo, como en el caso del álgebra). Las dos conquistas principales debidas a esta subordinación de los datos exógenos a los comienzos de construcciones endógenas resultan, tanto una como otra, de comparaciones entre relaciones intrafigurales pero con generalizaciones que efectúa el sujeto y que escapan también a las fronteras iniciales. La primera de estas conquistas procede de una generalización de la relación de envolvente, dada desde el comienzo en la percepción de cada figura cerrada. Esta generalización es fácil de seguir en los dominios de la psicogénesis: cuando los niños desplazan una figura o un objeto (por ejemplo en las experiencias de conservación), no se ocupan para nada, en general, del espacio que quedó vacío en A si el objeto ha pasado de A a B, mientras que en el nivel operatorio e interfigural tomarán en cuenta tanto los espacios ocupados como los que han quedado vacíos. Allí se encuentra el punto de partida de esta nueva forma más abstracta de envolvente que va a conducir a la noción deducida, y ya no figural, de un espacio en tanto englobante o continente general. De aquí surge rápidamente la construcción de coordenadas elementales.

La segunda conquista consiste en descubrir, en el seno de tal marco, covariaciones entre figuras solidarias. Si bien se han observado múltiples ejemplos cualitativos en los niños,[13] está claro que su traducción en términos de funciones algebraicas y de curvas interfigurales presenta problemas muy distintos, puesto que se trata de niveles

[13] J. Piaget, J.B. Grize, A. Szeminska, Vinh-Bang y colab., *Epistémologie et psychologie de la fonction*, París, PUF, 1968, EEG 23.

científicos elevados. Pero ello hace tanto más interesante el volver a encontrar, bajo las formas específicas propias del espacio, toda la complejidad de las relaciones entre las fuentes exógenas y endógenas del saber.

La cuestión histórica se plantea, en efecto, en forma paradójica: por una parte, la geometría griega permanece —en ausencia de un álgebra— de naturaleza intrafigural, y subordinada a fuentes exógenas; de aquí la ausencia de toda "transformación", no obstante los "porismas" de Euclides (o transformaciones locales centradas en sus resultados figurales), las coordenadas parciales de Apolonio, y las modificaciones de figuras de Arquímedes o de Pappo, todos ellos casos particulares sin generalizaciones metodológicas. Por otra parte, después de Lie y de Klein (con un comienzo anunciador en Chasles y Poncelet, pero limitado a la geometría proyectiva) el primado de las transformaciones se impone y subordina el conjunto de las (y no ya de *la*) geometrías a sistemas algebraicos. Hubo sin embargo una puesta en relación sistemática entre el álgebra y la geometría, inaugurada por la obra de Descartes, pero fue necesario que transcurrieran 185 años entre aquel desarrollo y el *Traité* de Poncelet; el problema que surge es pues encontrar una explicación de la extensión de este período interfigural, de casi dos siglos, antes de llegar al comienzo de las transformaciones geométricas, a pesar de que el álgebra es precisamente la ciencia de las transformaciones y de que desde el siglo XVII fue aplicada a la geometría.

Se ve entonces cuán análogo es este problema a los presentados por la psicogénesis, puesto que no se trata sino de las múltiples dificultades presentadas por una equilibración laboriosa entre las fuentes exógenas y endógenas del conocimiento. En efecto, el álgebra, por sí misma, es un sistema de formas que engendra su propio contenido, mientras que la geometría intrafigural no es, por sí misma, sino un sistema de formas moldeadas obligatoriamente sobre un contenido dado, concebido como ligado a los objetos. Allí donde el álgebra entra de plano en el dominio de las necesidades intrínsecas, el intrafigural está aún "sometido" a su contenido, y esto no le confiere una necesidad autónoma sino sólo un vínculo de naturaleza "legal", lo cual es muy distinto. Sobre el terreno algebraico, el sujeto se siente desde un comienzo libre de construir las transformaciones que le convienen, mientras que frente a la idea de transformaciones geométricas juzgadas posibles, debe preguntarse si tiene o no derecho a efectuarlas, en vista de la "realidad" impuesta por los "datos" (basta con recordar que Carnot calificaba de "absurdas" algunas de las transformaciones utilizadas por Chasles y Poncelet). En una palabra, el largo período interfigural no se reduce en modo alguno a la historia de una colaboración entre dos tipos de instrumentos directamente coordinables, sino que está caracterizado por el difícil ajuste (dada la

doble naturaleza objetiva y subjetiva del espacio) entre dos tipos heterogéneos de verdad, que se tratan de conciliar para la construcción de nuevos instrumentos.

Recordemos a este respecto el largo proceso de desarrollo del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII y las dificultades que tuvo para superar los problemas epistémicos que presentaba el "pasar al límite". Recordemos también que solamente con Euler la simetría de las figuras encontró su traducción analítica en función de cambios de ejes coordenados; que recién con J. Bernouilli y D'Alembert se establecen las relaciones entre la composición de movimientos de un sólido y la existencia de ejes instantáneos de rotación. Inútil insistir sobre los obstáculos que fue necesario superar para asignar un papel geométrico a los números imaginarios. En una palabra, contrariamente a los dominios donde el período *inter-* constituye una progresión regular en el remplazo de lo exógeno por lo endógeno, el interfigural (geométrico) está marcado por una serie de construcciones que deben efectuarse para ajustar el álgebra al espacio y recíprocamente.

Una vez superados estos conflictos locales, la línea general del desarrollo del transfigural consiste entonces en subordinar, todo aquello adquirido en el *intra-* e *inter-*figural, a sistemas de conjunto de transformaciones que habrán de engendrar las figuras o los subsistemas diferenciados, en lugar de sufrir sus resistencias. De aquí surge el primado y la victoria final de lo endógeno elaborando estructuras (como por ejemplo el grupo) que no consisten ya en "figuras", sino que integran en sistemas las construcciones realizables. Esto no obsta para que tal situación no llegue nunca a un punto final, puesto que dichas estructuras, una vez elaboradas y convertidas por ese mismo hecho en intrínsecamente necesarias, pueden a su vez ser tratadas como "datos". Éstos presentan ciertamente un carácter que podría ser calificado de "seudoexógeno", ya que pueden ser considerados como elementos que se prestan a nuevos análisis *intra-* (como en el caso de los morfismos que suceden a las estructuras operatorias), así como a nuevas construcciones de tipo *inter-* y *trans-*.

La interpretación desarrollada precedentemente acerca de los tres niveles *intra-*, *inter-* y *trans-*figurales en términos de verdades exógenas, exoendógenas (si podemos llamarlas así), y finalmente más y más endógenas, permite dar un sentido aceptable a nuestro esfuerzo por poner de manifiesto mecanismos comunes de *transición* (insistamos nuevamente en esto), entre un estado dado y el siguiente en la psicogénesis y en la historia de la ciencia. Si compararámos simplemente niveles del mismo nombre en estos dos dominios, no podríamos sino experimentar una impresión de inquietud con respecto a nuestro intento, puesto que no obstante la convergencia en las "sucesiones" de contenidos, hay diferencias considerables en los contenidos mismos. Por el contrario, si consideramos el remplazo de un saber

exógeno por construcciones endógenas, nos encontramos quizá en presencia de la ley más general de evolución de los conocimientos. Aun antes del lenguaje, el bebé de nivel sensorio-motriz comienza por asimilaciones empíricas (exógenas) de los objetos a sus esquemas de acción, mientras que a los 15 o 18 meses llega a coordinar estos esquemas bajo formas que ya Poincaré comparaba con grupos de desplazamientos. Si lo que nos interesa no es el contenido de los niveles sino el modo de construcción, entonces el comparar el mecanismo de la sucesión de niveles en la historia con el que muestra la psicogénesis, no puede parecer más escandaloso que el buscar los mecanismos comunes de evolución en los niveles más diferentes de la escala zoológica. Por otra parte, la inteligencia humana es un caso particular de "comportamiento", y en el plano biológico la evolución de los comportamientos sigue llena de misterios. Por eso nos place concluir esta discusión recordando que, en los casos más claros, se encuentran ya sobre un terreno tan elemental ciertos mecanismos llamados "asimilación genética" o "fenocopia", consistentes en remplazar una variación exógena por una reconstrucción endógena. Uno de nosotros ha tratado de mostrar, después de un estudio biológico de algunos de estos casos, que existe un parentesco con lo que nos ha enseñado la psicogénesis de los conocimientos.[14] Si tal generalización estuviera bien fundada, no carecería de interés para la epistemología de las ciencias.

[14] J. Piaget, *Adaptation vitale et psychologie de l'intelligence*, París, Hermann, 1974; J. Piaget, *Le comportement, moteur de l'évolution*, París, Gallimard, 1976, Collection Idées, núm. 354.

CAPÍTULO V
EL ÁLGEBRA

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores relativos a la historia de la geometría y a la psicogénesis de las nociones geométricas hemos puesto de manifiesto la presencia de mecanismos comunes que explican la evolución de las ideas en ambos niveles. Ellos refuerzan en el nivel histórico un hecho puesto de manifiesto hace muchos años en las investigaciones psicogenéticas: el desarrollo del conocimiento no se realiza por la agregación continua de nuevos conocimientos (y el desecho paralelo de conceptos e hipótesis que probaron ser infructuosos o falsos), sino por etapas que representan niveles cognoscitivos característicos; y en cada etapa hay una reorganización de los conocimientos adquiridos en la etapa anterior.

En particular, hemos visto que tanto el desarrollo histórico de la geometría como la génesis de las estructuras geométricas están caracterizados por tres períodos que hemos denominado *intra-*, *inter-*, y *trans-*figurales. En correspondencia con ello también se pueden distinguir tres grandes tipos de etapas, con subetapas, en la evolución de las estructuras algebraicas y —como se verá en el próximo capítulo—, en la evolución de las relaciones lógicoaritméticas en el niño. Las llamaremos etapa *intra-operacional*, *inter-operacional*, y *trans-operacional*. La etapa intra-operacional está caracterizada por relaciones intra-operacionales que se presentan bajo formas aislables sin transformaciones de una a otra que impliquen la existencia de invariantes y sin composición entre ellas que conduzcan a definir estructuras.

La etapa inter-operacional está caracterizada por correspondencia y transformaciones entre las formas aislables de la etapa anterior, con los invariantes que tales transformaciones exigen.

La etapa trans-operacional está caracterizada por la construcción de estructuras cuyas relaciones internas corresponden a las transformaciones inter-operacionales.

Esta sorprendente analogía en las etapas del desarrollo, entre la geometría y el álgebra, por una parte, y entre la historia de la ciencia y la psicogénesis, por la otra, tiene razones profundas. No se trata simplemente de una clasificacción de etapas. En efecto, las tres nociones (*intra-*, *inter-* y *trans-*) son tres formas distintas y solidarias de organización de los conocimientos, que constituyen como ya hemos

señalado el principal y más constructivo de los mecanismos que hemos podido establecer en la investigación de los mecanismos comunes entre la historia y la psicogénesis.

La identificación de las etapas es más difícil en el álgebra de lo que resultó en la geometría, o de lo que resultará en el estudio del desarrollo de la física. Por una parte, el proceso de algebraización de la matemática constituye por sí mismo una etapa trans-operacional para las ramas algebraizadas. Por otra parte muchas de las etapas del desarrollo del álgebra sólo pueden ser interpretadas a través de sus interacciones con el análisis y con la topología. Un estudio en profundidad de tales interacciones es una obra de largo aliento que exigiría una reconstrucción total de la historia de la matemática desde nuestra perspectiva epistemológica. Tal estudio estuvo en la intención original de esta obra pero nos vimos forzados a renunciar a ello, por lo menos en lo que respecta al presente volumen.

Dentro de un marco mucho más modesto, en el presente capítulo hemos hecho una selección de temas un tanto arbitraria. Si bien el análisis de ellos no tiene el valor de una demostración, sirve, por lo menos, para mostrar ejemplos ilustrativos de las hipótesis a las cuales fuimos conducidos en nuestro estudio de los mecanismos comunes entre historia y psicogénesis.

Comenzaremos con una interpretación acerca del origen del álgebra, que ha de servir para un doble propósito. Por una parte, mostrará las dificultades del análisis epistemológico en el proceso histórico que conduce a la formación de una rama de la ciencia, y la imposibilidad de basarse en las versiones que se encuentran en los textos corrientes de historia de la ciencia. Por otra, pondrá al descubierto algunos mecanismos básicos del proceso cognoscitivo (complementarios de los mecanismos *intra-*, *inter-* y *trans-*), muy difíciles de establecer cuando dicha rama de la ciencia está ya constituida.

Los demás temas seleccionados se encaminan fundamentalmente hacia una rama particular del álgebra que es la geometría algebraica. Allí el juego de las etapas es particularmente interesante: álgebra y geometría, análisis y topología, van interactuando de una manera que da un sentido al proceso evolutivo que culmina en la monumental obra de Grothendik. Nosotros nos limitaremos a mostrar, en forma esquemática, algunos de los hitos de ese proceso, que nos permitan fundamentar las conclusiones.

I. LOS ORÍGENES DEL ÁLGEBRA

1. No pocos historiadores de la matemática hacen remontar los orígenes del álgebra a diversos pueblos de la Antigüedad: asirios, babilonios, egipcios. Otros, con un sentido más crítico, ponen el punto de par-

tida en la escuela de Alejandría. Diophanto es la figura aceptada generalmente como formulador de los problemas de la aritmética en términos simbólicos, como quien introdujo los "valores indeterminados", representados no por números sino por letras, para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas propuestos.

Esta interpretación histórica fue siempre insatisfactoria. Por una parte, resulta claro que las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, sólo se explica por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Por otra, resulta difícil explicar el estancamiento total de una ciencia que sólo vuelve a florecer en pleno siglo XVI.

En la interpretación a la cual hemos hecho referencia, Vieti aparece como un renacentista en el sentido estricto del término. Su "vuelta a los griegos" le habría permitido retomar la ciencia de Diophanto y, simplemente, *perfeccionarla*, para convertirla en el punto de partida del álgebra en la época moderna. En este tipo de relato no aparece claro, sin embargo, el papel que desempeñaron los árabes, fuera de la introducción de una notación más adecuada para las operaciones aritméticas, del haber aportado el concepto de cero *como número* (que ellos importaron de la India) y del uso generalizado de las letras para representar cantidades "indeterminadas". Dentro de este contexto, la obra de Vieti sería la de un erudito y de un sistematizador, más que la de un creador y un revolucionario en el campo científico.

El panorama descrito sufrió una modificación fundamental a partir del libro de Jacob Klein, publicado en Alemania en 1934 bajo el título *Die grieschische Logistik und die Entstehung der Algebra*, pero mayor impacto ocurrió cuando se publicó la versión inglesa en 1968 (*Greek mathematical thought and the origin of algebra*). Jacob Klein ofrece una profunda reinterpretación de las obras de Diophanto y de Vieti sobre la base de un erudito análisis del pensamiento griego y del significado de la "nueva ciencia" que se desarrolla en los siglos XVI y XVII.

El minucioso estudio de J. Klein nos ha permitido ubicar los orígenes del álgebra dentro del esquema general de los mecanismos que hemos encontrado en el desarrollo de otros campos de la matemática y la física, así como de las etapas más avanzadas del álgebra misma. Su capítulo "On the difference between ancient and modern conceptualization" provee los elementos sobre cuya base nuestra propia interpretación de los mecanismos en juego se torna coherente y sólidamente fundada. Comenzaremos, pues, con una exposición sucinta de la posición de Klein que compartimos íntegramente, pero que nos parece requerir una explicación epistemológica complementaria.

El eje de la distinción entre Diophanto y Vieti —eje que una vez identificado da sentido a toda la reinterpretación histórica a la cual hacemos referencia— pasa por una diferenciación que es necesario establecer en el uso de los símbolos matemáticos. El carácter algebraico atribuido a la Aritmética de Diophanto se basa en la utilización de diversos signos y abreviaturas, particularmente con referencia a las incógnitas de las ecuaciones, a los cuales se los ha interpretado corrientemente como un "simbolismo algebraico". Está claro que la simple utilización de letras para representar números o entes geométricos no confiere carácter simbólico al tratamiento del problema. Euclides, y aún antes que él Archytas, hicieron uso de tales representaciones. A este respecto Klein cita el juicio de Tannery: "La letra remplaza bien a un número cualquiera [. . .], pero solamente allí donde ese número se supone está situado; no simboliza su valor, ni se presta a las operaciones"; y Klein agrega: "También Aristóteles hizo uso de tales letras matemáticas, por ejemplo en la *Física* y en el *De Caelo*, y aun llegó a introducirlas en sus investigaciones lógicas y éticas. Pero tal letra no es jamás un 'símbolo', en el sentido que tiene cuando lo que es significado por el símbolo es, en sí mismo, un 'objeto general'."

Es sólo a partir del siglo XVI que el uso de letras va a tener carácter simbólico. Cuando se atribuye a Diophanto la invención del álgebra (o a sus predecesores con respecto a quienes él no sería sino un compilador), se está tomando partido, explícita o implícitamente, sobre el carácter simbólico de sus métodos de solución.

El hecho de que Diophanto hable de problemas "generales" y de una solución "general" podría sustentar la interpretación clásica. Sin embargo, la reinterpretación de Klein pone en tela de juicio el carácter simbólico —en el sentido algebraico del término— que pudiera atribuirse a estas expresiones. A este respecto, su distinción entre "generalidad del método" y "generalidad del objeto de investigación" se torna fundamental:

"La matemática antigua se caracterizaba por una tensión entre método y objeto. Los objetos en cuestión (figuras y curvas geométricas, sus relaciones, proporciones de magnitudes geométricas conmensurables e inconmensurables, relaciones numéricas) dan la dirección en que avanza la investigación, puesto que ellos son a la vez el punto de partida y de llegada. La forma en que determinan el método de la investigación se muestra especialmente en el caso de demostraciones de 'existencia', es decir, demostraciones de que el 'ser' de un cierto objeto es posible puesto que no involucra autocontradicciones. El problema de la aplicabilidad 'general' del método es, por consiguiente, el problema de la 'generalidad' de los objetos matemáticos mismos, y *ellos* podían resolver este problema sólo sobre la base de una ontología de los objetos matemáticos. En contraste con esto,

la matemática moderna, y por consiguiente también la interpretación moderna de la matemática antigua, dirige su atención, del comienzo al fin, al *método como tal*. Los objetos quedan así determinados por una reflexión acerca de *la forma en la cual estos objetos se tornan accesibles a través de un método general*."

2. Vieti retoma una metodología característica del pensamiento griego, pero dándole una extensión y una profundidad que le permitirán reorganizar la obra de Diophanto en un nivel muy diferente. A nuestro juicio, el mérito de Klein consiste en haber mostrado, con erudita minuciosidad, en qué consiste dicha reorganización y por qué Vieti debe de ser considerado como el verdadero fundador del álgebra.

La *Introducción al arte analítico*[1] incluye una presentación de lo que Vieti llama "una cierta vía de inquisición de la verdad", que sería característica de las matemáticas y cuyo descubrimiento él mismo atribuye a Platón.

El nombre de "análisis" dado a esta forma de investigación provendría, según Vieti, de Zhéon, de quien presenta la siguiente cita: "considerar la cosa investigada como establecida y proceder por medio de lo que sigue de ello hasta una verdad que sea incontestada". En su sentido corriente —agrega—, la "síntesis" es un proceso que comienza con "la suposición de aquello que es aceptado y, por sus consecuencias, se llega a la conclusión y a la comprensión de aquello que se busca". Klein observa que Pappo había provisto una explicación más clara de este doble proceso de análisis y de síntesis.

En lo que concierne al análisis, Vieti retoma una distinción, hecha por los griegos, en dos géneros: el análisis *zetético* o *teórico* y el análisis *porístico* o problemático. Pero él agrega un tercer género que llama *rético* o exegético. "Hay, por consiguiente —dice Vieti— un arte zetético por el cual se encuentra la ecuación o la proporción entre la magnitud que es buscada y aquellas que son dadas; un arte porístico por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción, se busca verificar el teorema establecido; y un arte exegético por el cual, a partir de la ecuación establecida o de la proporción, se descubre la magnitud misma que se buscaba."

A lo anterior sigue un pasaje que es crucial para interpretar la "novedad" de la posición de Vieti:

"Ahora bien, lo que pertenece realmente al arte zetético es establecido por el arte de la lógica a través de silogismos o entimemas, cuya fundamentación está dada por las estipulaciones mismas

[1] Título original: "In Artem Analyticem Isagoge, Seorsim excussa ab opere restitutae Mathematicae Analyceos, seu, Algebra Nova", por François Vieti de Fonenay, Tours, 1591.

(símbolos) por medio de las cuales se llega a las ecuaciones y proporciones, estipulaciones que a su vez se derivan de nociones comunes como también de teoremas que son demostrados por el poder del análisis mismo. En el arte zetético, sin embargo, la forma de proceder es peculiar al arte mismo, en tanto el arte zetético no emplea su lógica en los números —que fue el tedio de los analistas antiguos— sino que usa su lógica a través de una logística que tiene que ver, en una forma que es nueva, con *especies*. Esta logística es mucho más eficaz y poderosa para comparar magnitudes entre sí que la logística numérica, una vez que la ley de homogeneidad ha sido establecida."

El hecho esencial en la formulación de Vieti es que el término "magnitud" es utilizado en su sentido más general. La magnitud buscada es, o bien un número determinado, o bien una magnitud geométrica específica, medible. Dice Klein a este respecto:

"De allí deriva el doble nombre de esta tercera forma de análisis cuyo objetivo es tanto el *cálculo* de las magnitudes aritméticas como la *construcción* de las magnitudes geométricas, partiendo de las ecuaciones canónicas ordenadas; ella es llamada *rética* con respecto a los números a los cuales conduce y que pueden ser expresados por los nombres comunes de los números de nuestro lenguaje; ella es llamada *exegética* con respecto a las magnitudes geométricas que considera como directamente presentes a nuestra *vista*."

Como lo observa Klein, convergen allí dos líneas independientes: el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto. La "nueva" álgebra de Vieti fue *a la vez* geométrica y aritmética. Para lograrlo, fue necesario llegar a un nivel de generalización más elevado que lo que estuvo al alcance de los "antiguos".

Al comienzo del capítulo IV, Vieti introduce una nueva distinción aclaratoria: "Las consideraciones numéricas (*logistice numerosa*) operan con números; las consideraciones por especies (*logistice speciosa*) operan con especies o formas de las cosas como, por ejemplo, con las letras del alfabeto." Aquí la palabra clave es "especies". El largo estudio de Klein refuta, en nuestra opinión de manera concluyente, las interpretaciones corrientes, aun cuando sean tan autorizadas como la interpretación de Cantor. La importancia de este punto justifica una nueva cita de Klein, *in extenso*, en la cual pone de manifiesto cuál es el punto crucial de la formulación de Vieti:

"Las especies son en sí mismas formaciones simbólicas —es decir, formaciones cuya objetividad meramente potencial es entendida como una objetividad actual. Ellas son, por consiguiente, sólo comprensibles dentro del lenguaje del *formalismo simbólico* que es completamente enunciado por primera vez por Vieti como único capaz de representar el *finding of finding*, es decir 'zetético'. A partir de aquí la herramienta más importante de la ciencia natural matemática, la *fórmula*, se torna posible por primera vez, pero por encima de ello,

una nueva forma de entendimiento, inaccesible al *episteme* antiguo se abre de esta manera.

"Cuando miramos hacia atrás, hacia el concepto pitagórico y platónico del *eidos* o de *arithmos* como aquello que hace posible en primera instancia el ser unificado de cada número, y lo comparamos con el concepto de especies arriba desarrollado, podríamos decir que la independencia *ontológica* del *eidos*, luego de hacer un rodeo a través del uso *instrumental* que de él hace Diophantus, llega aquí finalmente a su realización *simbólica*. Esto anuncia ya una transformación conceptual general que se extiende sobre la totalidad de la ciencia moderna."

La distinción crucial hecha por Vieti que le permite así dar un gran paso adelante y constituir el álgebra como una nueva disciplina, es el pasaje del concepto de *arithmos* al concepto de *símbolos generales*. El *arithmos* hace referencia *inmediatamente* a las cosas o a las unidades, mientras que los símbolos (letras) utilizados por Vieti hacen referencia *directamente* a la propiedad de "ser un número", propiedad que pertenece a cada uno de los números e *indirectamente* a las cosas o a las unidades cuya "numerosidad" está representada por un número. En otros términos, las letras remiten al concepto de "número en general". Esto es expresado por Klein en los siguientes términos:

"El signo que corresponde a una letra designa el objeto intencional de una 'segunda intención' (*intentio secunda*), a saber, de un concepto que a su vez va dirigido a otro *concepto* y no a un *ser*."

Aun cuando Eudoxio, Aristóteles —y más particularmente Proclo— hayan proclamado un *divina ars*, que no es otra cosa que la teoría general de las proporciones, capaz de englobar todo el conocimiento matemático en su conjunto, Vieti da un paso aún mayor penetrando más profundamente en el concepto de *transformación*. Aquí nosotros diferimos de Klein en cuanto a su falta de insistencia sobre este punto, a nuestro juicio, crucial. El capítulo V del *Isagoge*, intitulado "Las leyes de la zetética" nos parece contener un aspecto absolutamente esencial de su formulación y, desde nuestro punto de vista, su base epistemológica más importante. Klein relega este capítulo a una referencia en la nota 250.

El capítulo de referencia contiene las leyes de *transformación* de las ecuaciones, que él considera que son tres: *antítesis* (la transferencia de un término, de un miembro de la ecuación al otro); *hipobibasmo* (la reducción del grado de la ecuación, dividiendo los dos miembros por la *especie* común a todos los términos de la ecuación); y *parabolismo* (la división de los coeficientes de la ecuación por una cantidad convenida). No es por casualidad que Vieti concluye este capítulo con la siguiente observación:

"Diophantus, en aquellos libros que tenían que ver con la aritmé-

tica, empleó la zetética en la forma más sutil. Pero él lo presentó como si fuera establecido por medio de números y no también por especies (las cuales fueron, sin embargo, usadas por él), a fin de que su sutileza y habilidad pudiera ser más admirada, en tanto aquellas cosas que parecen más sutiles y ocultas para quien usa consideraciones acerca de números (*logistice numerosa*) son enteramente comunes e inmediatamente obvias para quien usa consideraciones acerca de especies (*logistice speciosa*)."

No parece que en ese capítulo se encuentre la verdadera raíz del razonamiento que consiste en hacer abstracción de los números y trabajar con "especies", sino una vez que éstas aparecen —aunque no de manera expresa— como invariantes en las transformaciones de una ecuación. Esta interpretación de la razón subyacente en el "salto" que realiza Vieti cuando pasa a otro nivel de generalización para fundamentar su nueva álgebra se encontrará explicitada por aquel que se sitúa en la continuación directa de esta línea de pensamiento: Descartes.

II. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

A partir de Vieti y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limita al estudio de las ecuaciones algebraicas. El método de resolución de la ecuación de segundo grado fue descubierto por los hindúes, aun cuando los babilonios hubieran ya encontrado anteriormente soluciones de ecuaciones particulares de dicho grado. Las ecuaciones de tercero y cuarto grado no fueron resueltas sino hacia fines del siglo XVII; la disputa entre Tartaglia y Cardan sobre quién fue el verdadero descubridor de la fórmula que permitía resolver las ecuaciones de tercer grado es un hecho histórico bien conocido.

Durante largo tiempo tendrán lugar numerosas tentativas para encontrar fórmulas que permitan resolver ecuaciones de grado superior a cuatro. Pero los únicos logros de este período se refieren a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En la misma época se encuentran también soluciones algebraicas para ciertos problemas particulares provenientes de la geometría o de la mecánica. Sin embargo, cada problema necesita de un método de resolución que le es propio, de un camino que es propio para cada situación particular. Estamos, evidentemente, en un período que corresponde a lo que hemos caracterizado como *intra-operacional*.

Por otra parte, no debe sorprender la ausencia de progreso significativo durante el siglo XVII y la primera mitad del siglo XVIII. La atención de los matemáticos se concentró, durante ese largo intervalo de tiempo, en el nuevo instrumento creado por Leibniz y por Newton: el cálculo infinitesimal. Esta herramienta, en manos de matemáticos de la talla de Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, va a conducir

al álgebra —durante la segunda mitad del siglo XVIII— a un nuevo nivel de desarrollo. Es en ese momento que se llegan a formular, en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, tal como el que condujo al teorema fundamental del álgebra. Pero allí se llega —y esto es importante destacarlo— haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas y de sus transformaciones, tomadas del cálculo infinitesimal. Según nuestra definición general, este período corresponde a una etapa *inter-operacional.* Durante largo tiempo, serán las transformaciones las que van a dominar el álgebra, hasta el surgimiento de la primera estructura algebraica, el *grupo,* que habrá de conducir a la etapa *trans-operacional.*

La figura clave en la transición entre la etapa intra-operacional y la etapa inter-operacional es Lagrange. Las tentativas "empíricas" para resolver ecuaciones de diversos grados (propios de la etapa *intra*) serán sustituidas, por Lagrange, por una cuestión de alcance mucho más general: ¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de ecuaciones de tercero y cuarto grado, y cuál ha sido la razón de su éxito? Lagrange pensó obtener así ideas que le permitieran abordar las ecuaciones de grado superior. En su análisis llega a mostrar que todos los métodos consistían en introducir *funciones que transformen la ecuación* de la cual se parte, y que permitan llegar a una ecuación "reducida". El problema así formulado se reduce a encontrar la relación entre las soluciones de la ecuación reducida y las soluciones de la ecuación original.

Llegado a este punto, Lagrange utiliza otra idea muy fecunda que contiene ya en germen las ideas que conducirán a la teoría de los grupos: el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las maneras posibles. Para ello, analiza ciertas funciones de las raíces de una ecuación y demuestra que el número de valores que puede tomar una función y, de las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cuando se permutan las x_j de todas las maneras posibles ¡es un divisor de n! Así, por ejemplo, para una ecuación de cuarto grado cuyas raíces son x_1, x_2, x_3, x_4, la función

$$y = x_1x_2 + x_3x_4$$

no toma sino tres valores diferentes cuando se permutan las raíces de las 24 maneras posibles. Además, Lagrange demuestra que el número de dichos valores diferentes determina el grado de la ecuación "reducida" que permite resolver la ecuación dada.

Ruffini retoma las ideas de Lagrange para intentar demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por radicales de una ecuación de quinto grado. Aun cuando su demostración queda incompleta, el marco conceptual en el interior del cual trabaja Ruffini lo sitúa en un lugar excepcional dentro de este período inter-operacional del

álgebra, muy próximo ya a la etapa siguiente que Galois tendrá el mérito de inaugurar.

Ruffini define las permutaciones de variables en una función dada, para luego clasificarlas en géneros. Es posible cambiar la terminología que él utiliza, y traducirla en términos de la teoría de grupos de sustituciones. Sin embargo, no se trata aquí simplemente de un cambio de terminología. Para Ruffini, las permutaciones están ligadas a los valores de las raíces. La clase de las permutaciones que no cambia el valor de la función *no tiene*, para él, *estructura*. Él concibe la transformación implicada en el pasaje de una permutación a otra, pero no concibe la estructura dentro de la cual esta transformación está, a su vez, implicada.

Por su parte, Gauchy considera las funciones con un grado mayor de generalidad: se trata de "funciones de n cantidades", pero dichas cantidades no serán ya consideradas como raíces de las ecuaciones. Se trata solamente de letras que representan cantidades indeterminadas. Cauchy llama "permutación" al orden de las letras. La *transición* de una permutación A_1 a otra A_2 la llama *sustitución* y la representa con la notación:

$$\binom{A_1}{A_2}$$

Luego definirá la "multiplicación" de sustituciones, y la sustitución idéntica, llegando así a la introducción de la sustitución inversa:

$$\binom{A_1}{A_2}^{-1} = \binom{A_2}{A_1}$$

Es a partir de aquí que va a demostrar un cierto número de teoremas que podemos considerar como los antecesores inmediatos de los teoremas generales sobre los grupos de sustituciones. Pero insistamos, una vez más, que no hay en Cauchy una idea de estructura, no ya tematizada, sino en modo alguno explicitada.

Las *Investigaciones aritméticas* de Gauss ocupan un lugar singular hacia el final de este período. Nos referimos en particular a la sección quinta, cuyo título es: "De las formas y de las ecuaciones de segundo grado". Si bien Gauss estudia las formas cuadráticas en relación con la solución de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas, su análisis minucioso de las formas cuadráticas binarias y ternarias se convertirá en el tema principal. No solamente se ocupará de clasificar las formas, en cuanto tales, definiendo sus "órdenes" y sus "tipos": logrará, por primera vez en la historia de las matemáticas, "componer" formas entre sí, es decir, definir *operaciones entre formas*.

Consideraremos, en primer lugar, algunas de sus definiciones ge-

nerales, antes de mostrar el tipo de problemas abordados por Gauss. La sección quinta de sus *Investigaciones aritméticas* comienza así:

"En esta sección hablaremos sobre todo de las funcions de dos indeterminadas de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$, donde a, b, c son números enteros dados, funciones que llamaremos *formas de segundo grado*, o simplemente *formas*. Estas investigaciones nos conducirán a encontrar todas las soluciones de una ecuación indeterminada cualquiera, de segundo grado, con dos incógnitas, sea que se pueda obtener la solución en números enteros, o solamente en números racionales" (p. 118).

Un poco más adelante, en el mismo texto, va a precisar aún más la definición de forma:

"Representaremos la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$ por el símbolo (a, b, c) cuando no se trate de las indeterminadas x e y. Así esta expresión designará de una manera indefinida la suma de tres partes, de las cuales la primera es el producto de un número dado a por el cuadrado de una indeterminada cualquiera, la segunda el doble del producto de b y de esta indeterminada multiplicada por otra, y la tercera el producto de c por el cuadrado de esta segunda indeterminada. Por ejemplo (1, 0, 2) expresa la suma de un cuadrado y del doble de otro cuadrado" (p. 119).

Otras definiciones esenciales son las siguientes:

□ "Diremos que un número dado está *representado* por una forma dada, si se pueden encontrar para las indeterminadas de esta forma valores que la hagan igual al número dado" (p. 119).

□ "Llamaremos, en lo que sigue, *determinante* de la forma (a, b, c) al número $b^2 - ac$, del cual veremos que dependen en gran parte las propiedades de esta forma" (p. 119).

□ "Si la forma F, cuyas indeterminadas son x, y, puede ser cambiada en otra forma F', cuyas indeterminadas son x', y', por medio de la sustitución $x = \alpha x' + \beta y'$; $y = \gamma x' + \delta y'$, siendo α, β, γ, δ, números enteros, diremos que la primera *contiene* la segunda, o que la segunda está contenida en la primera" (p. 121). Muestra enseguida que:

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

□ "Si, además, la forma F' puede ser cambiada en la forma F por una transformación similar, es decir si F' está contenida en F, y F en F', los determinantes serán iguales y $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$. En este caso, las llamaremos formas *equivalentes*" (p. 122).

□ "Llamaremos *transformación propia* a una sustitución tal que $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ y *transformación impropia* cuando $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, y la forma F se dirá que está contenida *propiamente* o *impropiamente* en la forma F' según que se trate de una transformación *propia* o *impro-*

pia. Si, por consiguiente, F y F' son equivalentes, la transformación será propia o impropia, según que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Si varias transformaciones son todas propias o todas impropias, serán llamadas *semejantes*; pero una forma propia y una impropia serán *desemejantes*" (p. 122).

A partir de estas definiciones, Gauss se formula, y resuelve, los problemas siguientes:

1] Dadas dos formas cualesquiera que tienen el mismo determinante, buscar si son equivalentes o no, si lo son propiamente o impropiamente, o de las dos maneras a la vez. Finalmente, encontrar *todas las transformaciones*, tanto propias como impropias, de una en otra.

2] Dada una forma cualquiera, encontrar si un número dado puede ser representado por ella. Encontrar todas las representaciones de un número dado M, por la forma F también dada.

El gran cuidado con el cual Gauss estudia estas cuestiones, y el rigor con el que procede a analizar los casos particulares, hace que pueda afirmar a justo título:

"En lo que precede, todo aquello que pertenece a la investigación de los caracteres de la equivalencia de formas, a sus transformaciones, y a la representación de números dados por formas dadas, ha sido explicado de manera que no deja nada que desear" (p. 206).

Más adelante, en el mismo trabajo, Gauss llega a uno de los puntos más originales de su obra, que introduce en los siguientes términos:

"Vamos a pasar a otro tema muy importante y del cual nadie se ha ocupado hasta ahora, a la *composición* de formas" (p. 241).

La definición de "composición de formas" dada por Gauss constituye la primera operación introducida en un dominio no numérico, y cuyas propiedades no pueden ser deducidas directamente de las operaciones entre números. Gauss llega así a numerosos teoremas importantes, tales como:

"Si las formas f, f' son de los mismos órdenes, géneros y clases que g, g', respectivamente, la forma compuesta de f y de f' es de la misma clase que la forma compuesta de g, g'" (p. 273).

Este enunciado va seguido del comentario siguiente:

"Se ve de allí qué es lo que debe entenderse por *una clase compuesta* de dos o más clases" (p. 273).

De lo dicho precedentemente, resulta que las "formas" estudiadas por Gauss y las propiedades que él demuestra con tanta minuciosidad, pueden ser traducidas hoy en el lenguaje de la teoría de los grupos. En efecto, una forma cuadrática, con una ley de composición como la define Gauss, es un grupo abeliano que tiene como elemento unitario la clase que Gauss llama "clase principal". Como ya hemos señalado, "traducciones" análogas pueden ser establecidas a partir de los resultados obtenidos por Ruffini o Cauchy. La mayor parte de los historiadores muestran su asombro ante la ausencia de respuesta a

la cuestión siguiente: ¿por qué estos autores, habiendo llegado tan cerca de los conceptos de la teoría de los grupos, no han podido dar el "pequeño salto" que hacía falta para constituirla? Desde nuestro punto de vista, hay una respuesta a esta cuestión: el "pequeño salto" sólo lo es en apariencia. Gauss constituye, junto con Lagrange, Ruffini, Cauchy y algunos otros que hemos omitido, la culminación del período "inter-operacional" en el desarrollo del álgebra y, más particularmente, en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sus métodos consisten, esencialmente, en transformar funciones y encontrar las relaciones que permanecen estables. Las propiedades que ellos deducen no son sino los invariantes de sistemas de transformaciones.

El tipo de desarrollo que hemos encontrado una y otra vez, tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis, muestra claramente que hay un largo camino por recorrer antes de poder pasar de un sistema dado de transformaciones a una estructura total dentro de la cual aquéllas resultan variaciones intrínsecas. Pero en eso consiste, precisamente, el pasaje de las conexiones inter-operacionales a las conexiones trans-operacionales.

Al nivel psicogenético, la etapa *trans-* es alcanzada —como se verá en el capítulo siguiente— cuando el sujeto puede efectuar operaciones sobre operaciones. Así, por ejemplo, un niño descubre cómo constituir todas las permutaciones posibles entre n elementos en el momento en que es capaz de sistematizar las permutaciones particulares, es decir, de introducir un orden en las permutaciones efectuadas. El conjunto de las permutaciones resulta, pues, de una seriación de seriaciones.

A este respecto, no es trivial señalar que Galois introduce la noción de "grupo" a partir de la acción de "agrupar". Las definiciones siguientes constituyen su punto de partida:

"La permutación de la cual se parte para indicar las sustituciones es totalmente arbitraria cuando se trata de funciones. Puesto que no existe ninguna razón para que en una función de varias letras, una letra ocupe un rango más que algún otro. Sin embargo, como apenas se puede formar la idea de una sustitución sin la de una permutación, haremos en nuestro lenguaje un empleo frecuente de las permutaciones, y no consideraremos las sustituciones sino como el pasaje de una permutación a otra.

"Cuando deseemos agrupar sustituciones, las haremos provenir todas de una misma permutación.

"Como se trata siempre de cuestiones donde la disposición primitiva de las letras no influye en nada, en los grupos que consideraremos, se deberán tener las mismas sustituciones cualquiera que sea la permutación de donde se haya partido. Por consiguiente, si en un grupo tal, se tienen las sustituciones S y T, se está seguro de tener la sustitución ST" (p. 47).

Un poco más adelante, dice explícitamente:

"Se llama grupo un sistema de permutaciones tal que, etc. Representaremos este conjunto por *G*" (p. 79).

Aquí, en las fuentes mismas de la primera noción de estructura de la historia del álgebra, encontramos el "hilo de Ariana" que nos permite comprender el pasaje del *inter-*, al *trans-*. Exactamente como en el caso de la psicogénesis, esta transición supone el pasaje de las operaciones sobre elementos, a las operaciones sobre operaciones.

III. CUERPOS

La última etapa en el estudio de las ecuaciones algebraicas estará a cargo de los algebristas alemanes de la segunda mitad del siglo XIX. En este período va a tener lugar un proceso característico de la evolución del pensamiento científico en los momentos en que ocurren los grandes "saltos" históricos; un proceso del cual hemos visto ejemplos en la evolución de la geometría y que volveremos a poner de manifiesto en la física. Hemos designado el mecanismo básico que entra en juego como *reinterpretación de variables.* Puesto que se trata de uno de los mecanismos más fundamentales en el progreso del conocimiento, conviene detenernos para analizarlo en detalle.

En nuestro breve resumen de la evolución de la teoría de las ecuaciones, señalamos como paso decisivo el estudio de las *formas* cuadráticas realizado por Gauss. La "composición de formas" que él introduce constituye la primera "operación" en la cual no intervienen explícitamente los números. Está claro, sin embargo, que cada ejemplo de una de esas formas era necesariamente una relación en la cual tanto los coeficientes como las variables representaban números. El próximo paso consistirá en mostrar que las propiedades de las funciones polinómicas y, por consiguiente, de las ecuaciones algebraicas, cuyo estudio había sido hasta entonces el objeto mismo del álgebra, no dependerían del hecho de que los coeficientes y las variables fueran números. Nuevamente aquí el progreso se logra modificando las preguntas básicas en el estudio de los polinomios de diversos grados y de las soluciones de las ecuaciones correspondientes. En lugar de preguntarse qué clase de números determinan las propiedades de los polinomios o de los ceros de un polinomio, la cuestión será cuáles son *las propiedades de los números* que intervienen en tales consideraciones. La respuesta a esta nueva pregunta fue sorprendente, en la medida en que se hizo claro que tales propiedades eran muy generales y que en modo alguno constituían características de los números como tales; es decir, que además de los números, muchos otros conjuntos poseían las mismas propiedades. Las propiedades comunes de tales conjuntos no definen pues, un campo específico de objetos matemá-

ticos, sino una *estructura* común a muchos de dichos campos. Fue Dedekind quien estudió dicha estructura, a la cual denominó "cuerpo".

En el estudio de los polinomios y de las ecuaciones algebraicas se puede, pues, prescindir de los números como tales y considerar solamente, como "coeficientes" o "raíces", conjuntos de elementos cualesquiera que cumplan las siguientes condiciones:

i] hay, entre los elementos del conjunto, dos leyes de composición interna

$$(a, b) \to a + b \ ; \ (a, b) \to ab$$

llamadas respectivamente adición y multiplicación;

ii] ambas leyes de composición forman grupos (excluyendo, en el caso de la multiplicación, el elemento neutro de la adición —llamado comúnmente "cero");

iii] las dos operaciones satisfacen las condiciones siguientes llamadas de distributividad:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

Se puede mostrar fácilmente cómo numerosos ejemplos de "entidades" (que no son los números enteros, racionales, reales o complejos manejados hasta entonces) satisfacen las reglas enunciadas y constituyen, por consiguiente, cuerpos. Tomemos como ejemplo los polinomios

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

donde las a_i son números racionales cualesquiera. Escribiremos simplemente: $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$

Podemos definir la suma y la multiplicación de la siguiente manera:

dados $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ y $Q = (b_0, b_1, \cdots, b_n)$
luego: $P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$
y

$$PQ = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \cdots, a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)$$

A partir de ahí es fácil encontrar los elementos *neutros* de ambas operaciones y verificar que con las definiciones dadas se satisfacen las condiciones de distributividad. Los polinomios forman, por consiguiente, un cuerpo.

Un segundo ejemplo son los números algebraicos. Si un número n es una raíz de la ecuación

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = 0$$

en la cual los coeficientes a_i son enteros ordinarios (positivos o negativos) luego n es un número algebraico. Si el coeficiente de la más alta potencia de x es 1, las soluciones de la ecuación se llaman enteros algebraicos de grado n. La suma, diferencia y producto de enteros algebraicos son enteros algebraicos.

Ejemplos: 1] $(-13 + 115)/2$ es un entero algebraico de 2° grado, pues es solución (una raíz) de la ecuación $x^2 + 13x + 71 = 0$
2] $(1 - (-5))/2$ es un n° algebraico pero no un entero algebraico pues es raíz de $2x^2 - 2x + 3 = 0$

El conjunto de todos los números algebraicos forma un cuerpo. Otros ejemplos son: las congruencias módulo un número primo, los números p-ádicos de Hensel, las series formales de Veronese.

Es importante señalar aquí que la noción de *cuerpo* explicitada, definida y designada por Dedekind había sido ya *utilizada* por Abel y Galois. En el caso de Abel, esto tiene lugar cuando realiza su célebre estudio sobre las ecuaciones hoy llamadas abelianas, demostrando que son resolubles por radicales. Allí define la noción de *polinomio irreducible* sobre el cuerpo engendrado por los coeficientes de la ecuación. Pero *la noción misma de cuerpo como conjunto* no aparece en Abel, ni tampoco en Galois.[2] Ambos consideran y definen con precisión los elementos del conjunto y no el conjunto mismo, que no aparece nunca de manera explícita.

Encontramos aquí una situación histórica similar a la que hemos hecho referencia en el análisis de la sección II con respecto a Gauss, Ruffini y Cauchy. Se agrega en este caso una circunstancia que merece ser destacada. Como ya hemos señalado, Galois comienza la etapa trans-operacional con relación a la evolución de las soluciones a las ecuaciones algebraicas, con el descubrimiento de la estructura de grupo, umbral que Gauss y sus contemporáneos no habían podido franquear. Sin embargo, con respecto al desarrollo de la noción de *cuerpo*, Galois permanece en la etapa *inter-operacional*. A Dedekind corresponde el mérito de haber dado el paso siguiente, cuando consigue poner en evidencia y tematizar la estructura de los cuerpos algebraicos, dando lugar a la etapa *trans-operacional*. Retomaremos en las conclusiones de este capítulo el problema de la "relatividad" de las nociones *intra-*, *inter-* y *trans*.

[2] N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, París, Hermann, 1974, p. 104.

IV. LOS INVARIANTES LINEALES

Debemos a Klein la unificación de las geometrías que provenían de dos vertientes diferentes: la geometría proyectiva y las geometrías no euclidianas. A partir de ese momento y durante un largo período, la búsqueda de propiedades que permanecen invariantes por transformaciones lineales constituirá uno de los temas preferidos de los matemáticos. La búsqueda de propiedades geométricas se convirtió en la búsqueda de invariantes algebraicos. Cayley y Sylvester, a quienes se agrega Salmon, fueron las grandes figuras de ese período. Muchos otros matemáticos se lanzaron a descubrir invariantes de formas algebraicas particulares (formas cuadráticas binarias, formas cúbicas ternarias, etc.). Pero el hecho de que los invariantes de ciertas formas algebraicas fueran, a su vez, formas algebraicas con invariantes, condujo a formular un problema más general: encontrar un sistema completo de invariantes para una forma dada.

Después de algunos ensayos fallidos y de ciertas demostraciones, parciales, el problema fue definitivamente resuelto por Hilbert. El "teorema de la base" de Hilbert demuestra que para cada forma (o sistema de formas), dado el grado y el número de variables, hay un número finito de invariantes integrales racionales y covariantes (la base), mediante los cuales todo otro invariante integral racional y covariante puede ser expresado como una combinación lineal de la base. Dicha base define así el sistema completo de invariantes de una forma dada.

Hilbert agota, en cierta forma, el problema de la búsqueda de invariantes proyectivos. Poco después de haber demostrado el teorema precedente, va a demostrar igualmente que los invariantes lineales no resuelven en forma completa la clasificación proyectiva de las curvas planas puesto que cierto tipo de curvas con singularidades diferentes no pueden ser distinguidas entre sí por sus invariantes (ejemplo: las curvas irreductibles de 5° grado que tienen un punto cuádruple y las que tienen un punto triple con una sola tangente). Sin embargo, mucho antes que la reflexión sobre el tema de los invariantes proyectivos llegara a un punto muerto, otros resultados provenientes del análisis habían abierto nuevas vías para poder sobrepasar los problemas que los métodos proyectivos dejaban sin solución. Se trataba fundamentalmente del estudio de nuevas transformaciones que conducían a nuevas formas de invariantes. Examinemos cómo se produjo esta evolución, basándonos en la teoría de las curvas y de las superficies algebraicas.

V. LAS TRANSFORMACIONES BIRRACIONALES

El desarrollo de la teoría de las curvas algebraicas comienza, históricamente, con la teoría de las curvas elípticas, es decir, la teoría de los

integrales de funciones racionales sobre una curva elíptica. El nombre de "elíptico" se aplicó a los integrales que permitían calcular la longitud de un arco de elipse. Luego fue aplicado a todas las curvas (curvas "elípticas") que condujeran a integrales del mismo tipo. Se observó después que las propiedades de base de los integrales elípticos podían ser generalizadas a integrales de *funciones* algebraicas arbitrarias. Finalmente, se pasa al estudio de *curvas* algebraicas arbitrarias.

El punto de partida de todo este desarrollo se encuentra en un texto de Abel de 1826 que está en el origen de la teoría de las funciones algebraicas. Sin embargo, es a partir de Riemann que la teoría tendrá una gran repercusión sobre la geometría de las curvas algebraicas. La contribución de Riemann es claramente explicada por F. Klein en un discurso pronunciado en Viena en 1894, en ocasión de un congreso científico:[3]

"El estudio de las funciones algebraicas revierte esencialmente en el estudio de las curvas algebraicas cuyas propiedades son tema de estudio de los geómetras, sea que ellos se cuenten entre los adeptos de la Geometría Analítica, donde las fórmulas juegan el papel principal, o bien de la Geometría sintética, en el sentido de Steiner y de von Standt, en la cual se estudia la manera en que son engendradas las curvas por medio de series de puntos o haces de rayos. El punto de vista esencialmente nuevo que ha introducido Riemann en esta teoría es el de la transformación general unívoca. Desde ese momento, las curvas algebraicas, en número inmenso de formas, son reunidas en grandes categorías donde, haciendo abstracción de las propiedades especiales de la forma particular de las curvas, se aborda el estudio general de las propiedades comunes de todas las curvas así reunidas."

Es necesario observar, sin embargo, que la obra de Riemann toma exclusivamente el punto de vista de la teoría de las funciones. En el más conocido de sus textos sobre este tema ("Teoría de las funciones abelianas") Riemann no utiliza sino raramente el lenguaje geométrico. En los términos de Dieudonné:

"No es una de las menores paradojas en la obra de este prodigioso genio, de donde la geometría algebraica ha salido enteramente renovada, que no se haga casi nunca cuestión de la curva algebraica: es de su teoría de las *funciones* algebraicas y de sus integrales que ha surgido toda la geometría birracional del siglo XIX y de comienzos del siglo XX" (p. 42).

La noción central utilizada por Riemann es la de "sustitución racional" (que más tarde se llamó "transformación birracional").

Es sobre todo Clebsch quien hará avanzar la interpretación geo-

[3] Dicho discurso es reproducido como "Prefacio" con el título de "Riemann y su influencia sobre las matemáticas modernas" en la edición de *Oeuvres Mathématiques de Riemann*, París, Albert Blanchard, 1968.

métrica de la teoría riemaniana de los integrales algebraicos. Clebsch introduce la definición de *género* como concepto de base para la clasificación de las curvas. Para una curva de grado n con d puntos dobles, el género está definido por la expresión

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - d$$

En un trabajo fundamental, Clebsch y Gordon (1866) van a demostrar que el género de la curva definida por la expresión $f = 0$ corresponde al número de los integrales de primera clase linealmente independientes. Sobre esta base van a demostrar que *el género es un invariante bajo transformaciones birracionales.*

A partir de este trabajo de Clebsch y Gordon la geometría birracional se desarrolla considerablemente durante las últimas décadas del siglo XIX. Nuevos resultados fueron obtenidos por Lüroth, quien demuestra que una curva de género *0* puede ser transformada en una línea recta por una transformación birracional. El mismo Clebsch demostrará que las curvas de género *1* pueden ser transformadas de manera análoga en una curva de tercer grado.

Brill y Noether llevarán a término los trabajos de esta escuela, definiendo la geometría sobre una curva algebraica en el plano proyectivo como el conjunto de las propiedades que son invariantes bajo transformaciones birracionales.

La geometría birracional de este período puede ser caracterizada como un ensayo para lograr la síntesis entre la geometría proyectiva y las ideas de Riemann. Aun cuando muchas de sus demostraciones son de naturaleza algebraica, los métodos utilizados se apoyan sólidamente en la teoría de las funciones. Esta última es la fuente de los conceptos utilizados por la geometría birracional, mientras que la consideración puramente algebraica de los invariantes no se abrirá camino sino muy lentamente.

Las transformaciones birracionales han permitido pues estudiar las propiedades de las curvas y superficies algebraicas con un alto grado de generalidad. En el caso específico del estudio de las singularidades de una curva algebraica, se llega a los dos teoremas siguientes:

1. Una curva algebraica puede siempre ser transformada, por medio de una transformación birracional, en una curva libre de singularidades y luego, por proyección, en una curva plana que tiene solamente puntos dobles ordinarios.

2. Una curva plana puede siempre ser transformada, por una transformación de Cremona, en una curva plana que tiene solamente puntos múltiples ordinarios.

En el caso de las superficies algebraicas, el teorema de reducción —análogo al primero de los anteriores— dice: toda superficie al-

gebraica f puede ser birracionalmente transformada en una superficie en S_5 libre de singularidades y luego, por proyección, en una superficie en S_3 que tiene solamente singularidades ordinarias.

En cuanto al segundo de los teoremas establecidos para las curvas algebraicas, su análogo para las superficies algebraicas se enuncia así: toda superficie algebraica f en S_3 puede ser transformada, por una transformación de Cremona, en una superficie que tiene solamente curvas múltiples ordinarias (es decir, con planos tangentes distintos), libre de singularidades y con un número finito de puntos cupidales ordinarios, además, dos curvas múltiples distintas cualesquiera tienen en cualesquiera de sus puntos comunes P, tangentes distintas, y P no es nunca un punto base de las curvas polares de y.

VI. LAS CURVAS ALGEBRAICAS: DE LAS TRANSFORMACIONES A LAS ESTRUCTURAS Y A LAS CATEGORÍAS

La teoría de las curvas algebraicas llegará, hacia fines del siglo XIX, a una nueva etapa cuyo motor fundamental serán los trabajos de Hilbert sobre los anillos de polinomios.

Las estructuras de anillos y de ideales fueron ya conocidas y utilizadas, como hemos visto, por Kronecker y Dedekind (aunque el nombre de anillo fue introducido por Hilbert). La geometría algebraica que comienza con ellos hace un uso sistemático de estos conceptos. Brill y Max Noether, por ejemplo, en la memoria ya citada, demuestran la invariancia birracional de las series lineales definidas sobre una curva por medio de la teoría de los ideales engendrados por polinomios.

La traducción clara y precisa de los problemas geométricos en términos de la teoría de los ideales sólo fue posible después de la demostración hecha por Hilbert de su célebre teorema de la base finita, y del teorema conocido bajo el nombre de "teorema de los ceros". Así, por ejemplo, el problema de definir una curva gausa algebraica irreductible, como intersección de un número finito de superficies algebraicas, tiene su correspondiente en las variedades algebraicas a las cuales se puede siempre asociar los ideales de los anillos de polinomios: el conjunto de los ceros de un ideal (es decir, el conjunto de los puntos donde se anulan todos los polinomios del ideal) es la intersección de un número finito de hipersuperficies algebraicas.

El resultado surge del teorema de Hilbert según el cual tales ideales admiten un sistema finito de generadores. Max Noether y E. Netto habían obtenido resultados parciales sobre el problema inverso: dado un conjunto de polinomios $F_1, F_2, \cdots, F_n$, se trataba de buscar las condiciones para que un polinomio se anule en los puntos de la variedad definida por las ecuaciones $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\cdots$, $F_n = 0$. El teorema de los ceros de Hilbert va a demostrar que

para todo polinomio F que se anula en dicha variedad existe un entero h tal que F^h pertenece al ideal A definido por los polinomios dados. Sin embargo, el problema de la descomposición de los ideales permanecerá todavía sin solución. Lasker dará un paso decisivo al formular las condiciones para que un polinomio pueda pertenecer al ideal engendrado por los n polinomios $F_1, F_2, \cdots, F_n$. Llegará a ello mediante la introducción de la noción de ideal primario, y demostrando que en la formulación precedente, el conjunto de polinomios F que cumple la condición $F^h \epsilon A$ es la intersección de un número finito de ideales primarios.

La teoría será completada por Emmy Noether, en la segunda década del siglo XIX. Ella logra finalmente redefinir los problemas de una manera rigurosa en el marco del álgebra abstracta. Las memorias de E. Noether cierran una etapa en el desarrollo del álgebra, unificando la teoría de las funciones algebraicas integrales (polinomios) con la teoría de los ideales de los números algebraicos enteros.

La etapa siguiente comienza hacia el fin de la segunda década de nuestro siglo con la noción de anillo local (es decir, anillos que poseen un solo ideal maximal). Esta estructura es estudiada en un comienzo desde un punto de vista puramente algebraico. Es solamente después de una decena de años de estudio que, gracias a O. Zariski, surge claramente la aplicación de esta estructura a la teoría de las curvas algebraicas. Para hacerlo, Zariski *retoma el método de las transformaciones birracionales*, pero, esta vez, los elementos de la transformación serán estructuras más complejas que aquellas que fueron utilizadas durante el apogeo de la geometría birracional en el siglo precedente.

Zariski utiliza un método de "localización" basado en la introducción de una topología apropiada (que hoy se llama la topología de Zariski), la cual permite dotar de un "anillo local" a cada punto de un conjunto algebraico. De allí surge un método que permite asociar, a todas las variedades, una variedad "normal" (es decir, una variedad tal que el anillo local de cada punto sea entero e integralmente cerrado). Zariski llega así a un método de resolución de singularidades a través de un proceso de normalización *asociado a una transformación birracional.*

El paso importante que siguió, en la vía de la algebraización completa de la geometría algebraica, fue el pasaje de las variedades afines (o proyectivas) a las variedades abstractas. Las primeras eran definidas por sistemas de ecuaciones, es decir, por polinomios; luego se establecía una correspondencia entre los "objetos geométricos" así definidos y anillos de un cierto tipo. Las propiedades de la variedad afín quedaban así reflejadas en el anillo que le estaba asociado de manera invariante.

Con la introducción de las variedades abstractas, no se está ya

ligado a la elección arbitraria de un sistema de ecuaciones (puesto que la misma variedad podrá corresponder a diferentes sistemas de ecuaciones), y al mismo tiempo desaparece la necesidad de sumergir dichos "objetos geométricos" en un espacio afín o proyectivo.

Para llegar al concepto de variedad abstracta, se comienza por un anillo conmutativo arbitrario con identidad, y se lo asocia a un "objeto geométrico" que es ahora simplemente un cierto conjunto dotado de una estructura topológica. El conjunto en cuestión es el conjunto de todos los ideales primos de *A* y se le llama "el espectro de *A*" (*Esp A*). A los ideales primos se les llama puntos del espectro. Cuando *A* es el anillo de los subconjuntos de un espacio afín, *Esp A* tiene una interpretación geométrica clara en términos de puntos, de curvas irreductibles y de superficies. *Esp A* dispone de una topología especial llamada topología espectral y se hace referencia a *Esp A* como espacio topológico. El objeto geométrico asociado al anillo conmutativo *A* es entonces identificado como un conjunto con una estructura topológica.

La definición de un haz estructural sobre el espacio topológico *Esp A* y la aplicación de la noción de espacio anillado (espacio topológico sobre el cual se da un haz de anillos) conducen al concepto de "esquema". Este concepto define una categoría que es equivalente a la dual de la categoría de todos los anillos conmutativos.

El concepto de esquema introducido por Grothendick en su reconstrucción de la geometría algebraica provee los medios para clasificar los "objetos geométricos" de una manera muy general. Como lo ha señalado Dieudonné, "esto conduce a una síntesis que Kronecker fue el primero en soñar", en tanto los esquemas pueden ser aplicados tanto a las variedades algebraicas como a la teoría de los números. Llegamos así a un nivel en el cual la transformación, como noción de base, que caracteriza el largo período dominado por la geometría birracional, es completamente remplazada por estructuras abstractas. El concepto de morfismo desempeñará luego el papel dominante, y las propiedades de los esquemas cederán paso a las propiedades de los morfismos.

VII. CONCLUSIONES

En la introducción de este capítulo anunciamos ya que el desarrollo del álgebra podía ser descrito en términos de una sucesión de etapas similar a las encontradas en la historia de la geometría y que, en el caso presente, denominaríamos intra-operacional, inter-operacional y trans-operacional. En la geometría no tuvimos dificultad alguna en diferenciar las tres etapas cuyas figuras claves representativas podrían estar constituidas por Euclides, Poncelet (o Chasles) y Felix Klein. En el ál-

gebra, por el contrario, el problema se presenta con mucha mayor complejidad, y requiere algunas observaciones preliminares.

Una vez que el álgebra estuvo constituida, su desarrollo presenta una curiosa anomalía: su "dominio" se reduce durante muchos siglos a un tema muy restringido —las ecuaciones algebraicas— que en los períodos subsiguientes será considerado como un aspecto muy parcial de su definición. Hay pues una aparente relación inversa entre el desarrollo del álgebra y de la geometría (que no invalida las analogías señaladas en cuanto a la sucesión de etapas durante dicho desarrollo): la geometría comienza con una identidad bien definida y un campo de definición bien preciso, pero pierde paso a paso en el curso de su historia su identidad primitiva, hasta convertirse en álgebra; por el contrario, el álgebra comienza con una definición muy restringida y adquiere paso a paso su propia identidad, hasta convertirse en el estudio de estructuras, varios siglos después de su nacimiento. No es ésta, sin embargo, la única forma de visualizar ambos desarrollos, y a ello volveremos más adelante.

Nuestro análisis comenzó con una primera exploración de los orígenes del álgebra, a fin de establecer cómo se constituye en rama de las matemáticas. Las conclusiones a las cuales hemos arribado —apoyados en gran medida en los estudios de Jacob Klein— pueden ser resumidas así:

a] Vieti efectúa la transición (que los antiguos no habían logrado llevar a cabo) del concepto de "arithmos" al concepto de símbolos generales, y es sobre estos últimos que se construirá el álgebra como una disciplina nueva.

b] Vieti llega a este logro mediante una síntesis entre el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto.

c] Si bien los conceptos de *transformación* y de invariante no son explicitados (tematizados) en esta época, desempeñan un papel innegable y fundamental. Es gracias a su utilización que se hace posible el pasaje del concepto de *símbolo* utilizado por los antiguos para *representar de una manera general un número particular*, al concepto de *símbolo general*, en tanto forma que representa un *número general* (es decir, un número cualquiera).

Cuando el álgebra se constituyó como disciplina independiente, su tema central y único —como ya lo hemos dicho— fue la resolución de ecuaciones. En este caso hemos podido diferenciar las tres etapas características del desarrollo.

Durante un primer período, extremadamente prolongado, no se trata sino de la resolución de ecuaciones específicas. El método que se aplica es puramente "empírico", por tanteos sucesivos. Cada ecuación es objeto de un tratamiento particular. Estamos, sin duda, en un período *intra-operacional.*

No es sino en el siglo XVIII que comienza la búsqueda de métodos

más generales y de plantear, asimismo, problemas generales tales como la existencia o no existencia de soluciones. Las transformaciones de ecuaciones que pueden permitir reducir una ecuación no resuelta a una ecuación resoluble dominan ampliamente las investigaciones. Aquí, como en el caso de la geometría, el análisis va a desempeñar un papel fundamental. Lagrange y Gauss son, entre otras, las grandes figuras de este período que constituye, desde nuestro punto de vista, un período *inter-operacional.*

Con Galois y el desarrollo de la teoría de los grupos —primera estructura tematizada en matemáticas— culmina la historia de la resolución de ecuaciones y comienza el predominio del análisis de estructuras. Es el punto de partida de un largo período *trans-operacional.*

Llegados a este punto, el proceso se torna mucho más complejo, y hemos debido limitarnos en este período a considerar solamente algunas líneas de desarrollo suficientemente representativas de las características generales del proceso total. Cada una de estas líneas de desarrollo pone en evidencia los mismos mecanismos identificados en el desarrollo general: puesta en relación de las propiedades internas antes de entenderlas como invariantes de transformaciones, y descubrimiento de éstas antes de concebirlas como las manifestaciones de una estructura total de la cual ellas resultan como variaciones intrínsecas. Todo ello va acompañado de otros dos mecanismos ya identificados en otros campos: la relativización de los conceptos y la reinterpretación de variables. Es el conjunto de estos mecanismos, idénticos, en tanto mecanismos, en el álgebra y en la geometría, los que determinan las etapas de tipo *intra-*, *inter-* y *trans-*.

El papel que desempeñan estas nociones en el proceso de conceptualización y en la construcción de las teorías involucra tres aspectos diferentes pero solidarios que será necesario explicitar a fin de aclarar el sentido epistemológico de estas nociones. Estos aspectos corresponden:

i] a niveles sucesivos de la historia o de la psicogénesis;

ii] a las fases de formación de cada uno de estos niveles, puesto que cada uno de ellos necesita una secuencia regular de subetapas en el seno de nuevas construcciones;

iii] a la forma en la cual las adquisiciones anteriores son reinterpretadas desde la perspectiva del nuevo nivel al cual se ha llegado.

Ya hemos hecho referencia al punto *iii*] en el capítulo sobre el desarrollo de la geometría, mostrando cómo en cada etapa hay una reorganización de los conocimientos adquiridos durante la etapa precedente.

Con respecto a los puntos *i*] y *ii*] es necesario agregar un hecho importante: algunos desarrollos conceptuales pueden surgir en la intersección de dos o más líneas de desarrollo de temas que tienen una evolución diferente, y corresponden por consiguiente a la coordina-

ción de dos subsistemas dentro de un sistema global. Cuando dos subsistemas son coordinados al descubrirse una parte común o intersección, el nivel logrado por esta parte común puede ser superior, equivalente o inferior al de los subsistemas que lo constituyen. Este hecho se agrega a la regla general según la cual cada etapa repite en sus propias fases el proceso total, es decir, una sucesión de etapas *intra-*, *inter-*, y *trans-*. Se encuentra así, en las fases de construcción de un nivel superior, el mismo proceso que en la sucesión de los grandes niveles. Recordemos a este respecto el desarrollo de la estructura de grupo que es, en sí mismo, de naturaleza *trans-operacional*:

a] Los primeros grupos debidos a Galois fueron referidos a permutaciones ya dadas cuya construcción no era debida al grupo mismo. Desde el punto de vista del grupo como tal se trataba, pues, de relaciones *intra-operacionales*, aun cuando, desde el punto de vista de la etapa en su conjunto, se tratará de una etapa de tipo *trans-*.

b] Luego llegamos, con Klein, a grupos de transformaciones tales que estas últimas desempeñan un papel constitutivo, como lo son por ejemplo las transformaciones proyectivas que representan las componentes mismas de su grupo. En lo que concierne a esta estructura estamos así en lo *inter-operacional*.

c] En tercer lugar, se elabora la noción de grupo abstracto aplicado a un conjunto cualquiera, como por ejemplo el grupo que opera sobre un espacio vectorial. Estamos pues, de esta manera, en lo *trans-operacional* con respecto a la evolución específica de la conceptualización y aplicación de la estructura de grupo.

Como ya lo hemos indicado, debe de haber, detrás de estas nociones de *intra-*, *inter-* y *trans-*, simplemente descriptivas en apariencia, un mecanismo constructivo que trataremos de desentrañar.

Conviene, pues, hacer una descripción más detallada de estas *construcciones progresivas*, con su acción *retroactiva*. Supongamos tres etapas *A*, *B*, y *C* en una cierta línea de desarrollo. Supongamos que para *B* se tienen las subetapas *a*, *b* y *c*. Ahora bien, aun cuando *B*, no esté sino en la subetapa *a* (es decir, *intra-* con respecto a *B*), hay ya reinterpretación de *A* en un sentido que retroactivamente la somete a operaciones de tipo *B* (es decir, de tipo *inter-*) mientras que los elementos de *a* en *B* van a intervenir, a su vez, en operaciones de tipo *inter-* en *b*, y así sucesivamente. Esto muestra que si la sucesión *intra-*, *inter-* y *trans-* se la encuentra, en dirección *proactiva*, tanto en las subetapas como en las etapas, actúa también en forma retroactiva sobre las construcciones anteriores por medio de una reorganización. Esto se ha hecho posible como consecuencia de las nuevas construcciones. Pero, por otra parte, esta reorganización es también la condición necesaria para la *generalización constructiva* (como opuesta a la generalización inductiva) de las construcciones anteriores. En efecto, "la generalización constructiva no consiste en asimilar nuevos

contenidos a formas ya constituidas, sino más bien en engendrar nuevas formas y nuevos contenidos, y, por consiguiente, nuevas organizaciones estructurales".[4]

La secuencia de las tres etapas *intra-*, *inter-* y *trans-*, presenta problemas epistemológicos en los cuales es necesario profundizar. Uno de estos problemas es la aparición tardía de las transformaciones y de las estructuras. En términos de nociones elaboradas hace ya mucho tiempo por la epistemología genética, podemos dar cuenta del carácter inicial de los elementos y tardío de las estructuras, a través de los mecanismos progresivos de abstracciones y de generalizaciones: las estructuras exigen a la vez una abstracción reflexiva (o tematizante) más fuerte, y una generalización más completiva.[5] Pero esta interpretación es aún insuficiente puesto que no da cuenta de los principios motores de tales construcciones, ya que, en última instancia, las abstracciones y las generalizaciones no son sino *instrumentos* del desarrollo cognoscitivo.

En lo que concierne a las finalidades sucesivas y últimas del proceso que conduce del *intra-*, al *inter-*, y al *trans-*, la respuesta aparece como bastante evidente: tanto el matemático como el niño que ha llegado a cierto nivel, no se contentan jamás con comprobar o descubrir. En cada etapa, buscan llegar a las *razones* de aquello que han encontrado. Esto equivale a buscar, en cada caso, bajo la generalidad de las conexiones establecidas, su "necesidad" intrínseca, puesto que el sujeto no reconoce una construcción como válida sino en la medida en que ella se hace necesaria en virtud de razones finalmente explícitas. Se puede comprender entonces el porqué de nuestro proceso general, puesto que es él mismo quien genera las diversas formas de una necesidad progresiva cuya conquista no se logra sino por etapas. Las relaciones entre elementos, propias de la etapa *intra-*, carecen de "necesidad" o no alcanzan sino formas todavía muy limitadas próximas a la simple generalidad. Comprender los estados como resultante de las transformaciones y, para llegar a ello, transformar localmente los elementos, como es el caso del *inter-*, provee ya un primer acceso a conexiones necesarias que determinan intrínsecamente sus propias razones. Pero las transformaciones exigen, a su vez, una motivación que las explique, y la búsqueda del *trans-* que conduce a las estructuras es la respuesta a este nuevo requerimiento, ya que un sistema total de transformaciones engendra nuevas transformaciones y provee las razones de su composición de conjunto. Pero está claro que este carácter "total" permanece aún relativo, y que el movimiento continúa (por ejemplo, el pasaje de las estructuras a las categorías). En síntesis, la sucesión que conduce del *intra-*, al *inter-* y al *trans-* no es

[4] J. Piaget, *Recherche sur la généralisation*, París, PUF, 1978, p. 221.

[5] J. Piaget, *op. cit.*, capítulo XIV "Conclusiones generales".

sino la expresión de un mismo proceso que, subjetivamente, es la búsqueda de la razón, y que, objetivamente, es la conquista de una necesidad siempre relativa pero que crece incesantemente de una etapa a la siguiente.

CAPÍTULO VI
LA FORMACIÓN DE LOS SISTEMAS PREALGEBRAICOS

El álgebra es la ciencia de las estructuras generales comunes a todas las partes de las matemáticas, incluyendo la lógica. Pero para llegar a estas estructuras, han sido necesarias dos etapas previas, tal como lo hemos visto en el capítulo histórico precedente. La primera etapa ha sido llamada "intra-operacional" puesto que el análisis se refiere solamente a sistemas particulares considerados en sus propiedades estáticas y limitadas. Tal es el caso de la teoría de las proporciones geométricas elaboradas en el seno de las perspectivas euclidianas. La segunda etapa corresponde a un nivel "inter-operacional" y cubre un largo período que comienza con los análisis de Vieti referidos a las transformaciones, hechas posibles gracias a un simbolismo abstracto y general. Mucho más tarde todavía se constituyen las síntesis "trans-operacionales" que alcanzan lo que llamamos las estructuras propiamente dichas y cuyas construcciones comienzan con los grupos de Galois. Pero uno de los caracteres propios de estos tres grandes conjuntos sucesivos de elaboraciones teóricas es el de utilizar todos ellos, a título de instrumentos psicológicos, lo que podríamos llamar una "tematización reflexiva", es decir, una conceptualización exhaustiva de las entidades matemáticas progresivamente construidas, y esto aun antes de que tales intuiciones representativas se prolonguen en axiomatizaciones.

A este respecto, y como estas entidades constituyen productos engendrados por las actividades del sujeto y no datos de la experiencia física, el problema que naturalmente se presenta es el de buscar las fuentes de estas actividades, puesto que una conceptualización endógena no podría consistir en una creación *ex nihilo* y exige, como condiciones previas, un cierto "saber hacer" en acciones no tematizadas ni aún conscientes en el detalle de sus articulaciones. Esto equivale a decir, por consiguiente, que en el pensamiento "natural" del niño o del adulto no matemático, las acciones y las manipulaciones de los objetos no se constituyen al azar sino que en ciertos casos se organizan de manera sistemática bajo la forma de lo que podríamos llamar "preestructuras" o sistemas prealgebraicos, de los cuales los casos más simples y mejor conocidos son las clasificaciones, las seriaciones y otros "agrupamientos". En este sentido, uno de los aspectos de interés epistemológico de estos sistemas elementales consiste no tanto en preparar lo que habrá de tomar la forma de "grupos" o de "látices" en el plano del pensamiento científico (aun cuando éste sea en parte el ca-

so del que se trata), sino en presentar en sus construcciones tres etapas análogas a las de *intra-*, *inter-*, y *trans-* como si se las encontrara en toda elaboración lógico-matemática.

El gran problema que ahora se presenta es el de establecer si se trata de los mismos procesos a pesar de las diferencias considerables de escalas. Los tres períodos distinguidos en la historia se refieren en efecto a procesos separados por siglos (de la Antigüedad a Vieti, luego de Vieti a Galois) en tanto que si tratamos de discernir sucesiones comparables en el seno de la psicogénesis, nos enfrentamos con desarrollos rápidos, comprendidos entre los 4-5 y los 11-12 años, al mismo tiempo que con etapas mucho menos diferenciadas. Debemos preguntarnos por consiguiente si en tal caso es legítimo considerar nuestra triada *intra-*, *inter-*, *trans-*, como uno de los mecanismos comunes que, como la abstracción reflexiva o las generalizaciones completivas, se imponen necesariamente en todos los dominios y a todos los niveles, o bien si las comparaciones que hemos hecho no constituyen sino medios cómodos para el historiador y el psicólogo de describir hechos heterogéneos en un lenguaje que facilite el análisis. El problema podría haber sido presentado ya a propósito de la evolución de la geometría, pero en este caso el contraste era tan claro entre lo intrafigural (que no se refería sino a las propiedades internas de las figuras) y lo inter-figural (referido al espacio como tal en tanto continente general) que las comparaciones entre la historia y la psicogénesis parecieron menos artificiales. Por el contrario, en el dominio del álgebra, hay un contraste muy grande entre las teorías tematizadas en el curso de la historia y las etapas de la organización práctica (y en buena parte inconsciente) de las acciones y de las operaciones en juego en las estructuraciones o preestructuraciones que el observador teórico cree discernir en el seno de una psicogénesis (de la cual el sujeto infantil no conoce las leyes). La consideración de nuestra triada *intra-*, *inter-*, *trans-*, puede pues parecer, a primera vista, muy artificial.

Una cuestión como la que hemos enunciado reclama dos tipos de respuesta. La principal, que examinaremos más adelante, consiste en mostrar que si bien esta triada constituye realmente un mecanismo común de naturaleza general, es porque resulta de necesidades internas y no consiste simplemente en un orden regular de sucesiones. La segunda respuesta es que cada etapa *intra-*, *inter-*, o *trans-*, implica a su vez algunas subetapas y, lo que es más fundamental, que ellas siguen el mismo orden y por las mismas razones. Podemos dar como ejemplo el tercero de los grandes períodos históricos que caracterizamos en la construcción de las estructuras generales designándolo por el término colectivo de "trans-operacional". Es fácil ver —como ya lo hemos observado en el capítulo precedente— que esta gran etapa *trans-*, se subdivide en tres subetapas que podríamos llamar "trans-intra", "trans-inter", y "trans-trans".

Si en el nivel histórico nuestra triada involucra subetapas imbricadas que son triadas a su vez, debemos preguntarnos si no ocurre también esto en el curso de ese importante período prealgebraico en el cual el sujeto, incapaz de tematización sistemática, construye, pero en el plan de la acción y del saber hacer, lo que un observador interpreta en términos de estructuras progresivas. Vamos pues a intentar la búsqueda de nuestra triada en el dominio de la psicogénesis, utilizando el mismo vocabulario pero dejando sentado que no se trata sino de acciones, y que este vocabulario sólo intenta describirlas en nuestro lenguaje sin prejuzgar acerca de aquello de lo cual toma conciencia el sujeto mismo.

I. EL INTRA-, EL INTER- Y EL TRANS- AL NIVEL DE LAS ACCIONES

Las múltiples investigaciones que se han llevado a cabo durante años sobre el desarrollo de las operaciones en el niño han conducido a distinguir tres grandes períodos sucesivos en todos los dominios explorados hasta ahora: uno de ellos, llamado "preoperatorio", en el curso del cual se constituyen poco a poco acciones repetibles, modificadoras de los objetos, pero que no se transforman ni se coordinan entre ellas; el segundo, llamado de "operaciones concretas", donde ellas se organizan en sistemas (los agrupamientos) que involucran ciertas transformaciones de las operaciones mismas; y el tercero, que está caracterizado por operaciones hipotético-deductivas, con síntesis de las transformaciones que pueden en ciertos casos tomar la forma de "grupos".

Resulta claro que estas tres etapas, cuyas edades son de 4-6 años, de 7-10 años, y de 11-12 años en adelante, corresponden a nuestra sucesión *intra-*, *inter-*, y *trans-*, como vamos a mostrarlo con ejemplos concretos antes de llegar a las razones que convierten esa progresión en necesaria y que justifican el número de tres (a la manera de "tesis", "antítesis" y "síntesis" de la dialéctica clásica), en lugar de una distribución en un número cualquiera.

a] En lo que respecta al *intra-*, lo propio de este período es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además, el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores, que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia de consecuencias que de ella puedan deducirse.

Consideraremos un ejemplo que juzgamos suficientemente claro para ilustrar esta situación *intra-*. Se trata de una experiencia en la

cual se presentan al niño dos recipientes similares, uno de ellos A transparente y el otro B oculto por una pantalla. Ambos contienen el mismo número de bolitas. La experiencia consiste en lo siguiente: se pide al niño que agregue bolitas en ambos recipientes pero de tal manera que con una mano va agregando una a una en A, mientras que con la otra va agregando una a una en B, simultáneamente. Después de algunos agregados, se le pregunta si cree que continúa la igualdad en el número de bolitas en ambos recipientes, es decir, si $A + n = B + n$. La experiencia muestra que desde los 4 o 5 años todos los sujetos están convencidos que la igualdad $A + n = B + n$ se conserva, cuando el número n es pequeño. Una vez resuelta esta operación de base, se la toma como punto de partida de otras experiencias en donde se trata de ver si ella se coordina con otras o, dicho de otra manera, si es posible extraer de ella consecuencias, es decir, si se presta a una deducción de las consecuencias que ella misma encierra. La más simple de las experiencias que se pueden realizar a partir de allí da lugar ya a fluctuaciones muy reveladoras: cuando se pregunta a los niños qué ocurre si se continúa la acción durante largo tiempo (por ejemplo una hora, o hasta la noche, etc.), aclarando nuevamente que se trata de agregar bolitas una a una con una mano en A y con la otra en B, la mayoría de los sujetos rehusan tomar una decisión. En general, responden: "no se puede saber sin contarlas". En algunos casos de niños más avanzados (como por ejemplo un sujeto de cinco años y medio) se han obtenido respuestas como la siguiente: "cuando uno lo sabe para una vez, lo sabe para siempre", lo cual indica ya una cierta aproximación a una recurrencia de nivel *inter-*. En otra experiencia se varió la pregunta de la siguiente manera: se comenzó por colocar n bolitas en A y m en B, de tal manera que m fuera mayor que n pero con una pequeña desigualdad (no más de dos o tres elementos). En este caso se preguntó si agregando sucesivamente una bolita en cada uno de los dos recipientes, se conservaría la desigualdad inicial, o si, por el contrario, los dos conjuntos terminarían por ser iguales. Aquí también las respuestas fueron fluctuantes; algunos sujetos creían que la desigualdad terminaría por desvanecerse aun cuando tuvieran claro que las cantidades agregadas en ambos recipientes se mantenían constantemente iguales. Otra experiencia de esta serie merece ser mencionada aquí. Se parte de dos conjuntos A y B en los mismos recipientes anteriores, pero con un número de bolitas muy desigual entre uno y otro. Se van quitando uno a uno los elementos de cada recipiente en la misma forma que antes, es decir uno con una mano y otro con la otra, haciendo la operación simultáneamente, y luego de que se han retirado n bolitas se pregunta si se ha sacado igual número de ambos o se ha sacado más de uno que de otro. Es sorprendente comprobar que los niños consideran que las bolitas que se sacaron del recipiente que contenía más son mayores

en número que las bolitas que se sacaron del otro recipiente. Hay aquí una confusión, es decir una imposibilidad de discriminación, entre la extensión (número) y la comprensión (conjuntos grandes o pequeños) que hace que se atribuya un número mayor de bolitas extraídas al conjunto que originariamente tenía más.

Estos hechos nos parecen suficientes para caracterizar a la etapa *intra-*. Ésta consiste, pues, en mantenerse apegado a una acción correcta que ha sido repetida, pero sin poder todavía insertarla en un sistema de condiciones o de consecuencias que aumenta el alcance de la operación y la inserta en una totalidad de transformaciones solidarias. Hay sin embargo ya un comienzo de transformaciones, pero referidas a los objetos que modifican las acciones en juego, y no a las acciones u operaciones de partida que permanecen aisladas y no dan lugar sino a un esfuerzo de análisis o de comprensión centrado sobre la naturaleza y las propiedades de cada una de ellas considerada como aislada. De aquí surgen las analogías con el "intra-figural" del capítulo II donde la figura estudiada no está caracterizada sino por sus relaciones internas y no por sus relaciones con el espacio en el cual está inserta.

b] La característica fundamental de la etapa "inter-operacional", reside en lo siguiente: Una vez comprendida una operación inicial (lo que llamamos en la experiencia antes descrita operación de base) es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarla con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos. Así por ejemplo, en el dominio de las clasificaciones, el sujeto podría no solamente reunir en una clase A objetos que presentan una misma característica a, sino que también pueden incluir esta clase A en otra B, más grande, que comprende los elementos de A y además los de B que no son A (clase que llamaremos A'), de donde $B = A + A'$. El sujeto también puede en estos casos, incluir B en C según el mismo principio ($C = B + B'$). Pero lo que no es posible, cuando se permanece en el nivel de estas imbricaciones "naturales", es reunir directamente en una misma clase elementos alejados entre sí. Si se trata de una clasificación zoológica, por ejemplo, no se puede reunir una mosca y un camello, sin pasar por un conjunto complejo de imbricaciones intermedias, a menos de permanecer en clases muy generales, como por ejemplo todos los animales (pero dejando de lado subimbricaciones importantes). Son estas limitaciones las que nos obligan a distinguir los sistemas inter-operacionales de las "estructuras" trans-operacionales, las coordinaciones de elementos contiguos de las síntesis pro-

piamente dichas; y es en función de tales diferencias que se introdujo la noción de "agrupamientos".

Esto no impide que en el seno de los agrupamientos sea ya posible establecer ciertos conjuntos de distintas composiciones. Así por ejemplo en el seno del agrupamiento de las genealogías (grupo del árbol genealógico en el cual se hace abstracción de los matrimonios) la relación central de hijos a padre engendra la de hermano (es decir hijos del mismo padre), de abuelo, de primo (nietos del mismo abuelo pero no hijos del mismo padre), etc. De aquí surgen equivalencias, tales como la que reúne la caracterización de un primo como hijo del hermano del padre, o hijo del tío, o aun el sobrino del padre, etc. Pero no hay aquí sino coordinaciones de elementos contiguos, referidos a procesos discursivos (en el sentido de analíticos y no de dialécticos) sin llegar a los rebasamientos del tipo *trans-* que resultarán de las síntesis propiamente dichas.

Por el contrario, conviene precisar que en esta situación intermedia que ocupan los agrupamientos con la formación de las relaciones *inter-*, estas últimas se orientan progresivamente en la dirección de las transformaciones. Si comparamos el conjunto de los agrupamientos de clases con los agrupamientos de relaciones, nos encontramos en presencia de dos sistemas generales de transformaciones sin la síntesis que los reunirá en la etapa *trans-*. Una de estas transformaciones generales (tan simple que se podría dudar que se trata de una transformación) es la negación, que interesa especialmente a los agrupamientos de clase (señalaremos luego ciertas dificultades que se presentan a este propósito). La segunda transformación general está constituida por las reciprocidades y concierne sobre todo a los agrupamientos de relaciones en el seno de los cuales plantea también un cierto número de problemas. Se ve inmediatamente que estos dos tipos de transformaciones constituyen las dos formas posibles de la reversibilidad, es decir, del carácter común a todas las operaciones y a sus composiciones. Aquí reside, por consiguiente, la novedad esencial que marca el progreso de los sistemas "inter-operacionales" con respecto a los "intra-operacionales".

En lo que respecta a la negación, constituye la condición *sine qua non* de la delimitación de todas las clases imbricadas puesto que, si $A \subset B$ esto significa (supuesto que $B > A$) que $B = A + A'$, y que $A = B - A'$. En otros términos, *omnis determinatio is negatio*, como decía Espinoza, lo cual es cierto en los dos sentidos, puesto que $A' = B - A$, y que además encontramos en todos los casos la implicación $(p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow \bar{p})$. Hay ya aquí algunas evidencias del pasaje a las transformaciones. Las investigaciones anteriores sobre la cuantificación de la inclusión muestran claramente que se trata de transformaciones que se van ajustando poco a poco en el curso de la etapa *inter-* y que no están generalizadas en el nivel *intra-*. Se presen-

ta por ejemplo al niño un conjunto de diez flores, de las cuales 6 o 7 son margaritas y las otras flores cualesquiera. El sujeto está de acuerdo en que "todas ellas son flores", y que las margaritas también lo son. Sin embargo, cuando se le pregunta si en ese ramo hay "más flores o más margaritas", la respuesta corriente, hasta la consolidación del nivel *inter-*, es que "hay más margaritas", puesto que hay solamente 3 o 4 que no son margaritas. El sujeto razona como si la totalidad de las 10 flores, una vez disociada en dos partes, desapareciera como tal: la subclase A no pertenece más a B bajo la forma $A = B - A'$, y el todo B se reduce a lo que queda en A'. Queda claro que la oposición entre las A y las A' implica ya una negación elemental, puesto que las A no son A', pero no es todavía una negación relativa a su referencial B, ya que éste ha desaparecido después de la división del todo. Sin embargo las negociaciones en juego en una clasificación son todas relativas a referenciales ($A = B - A'$; $B = C - B'$; etc.) y es en ese sentido que ellas constituyen una de las condiciones necesarias de las imbricaciones. Podemos pues considerar que la ausencia de imbricación de A en B (que impide la cuantificación de las inclusiones en la experiencia que acabamos de citar) tiene lugar, en uno de sus aspectos esenciales, debido a las dificultades relativas a la regulación de las negaciones.

En cuanto a las reciprocidades, su carácter de transformaciones generales es más fácil de comprobar en los dominios donde predominan, es decir en los agrupamientos de relaciones. Pero aquí también comprobamos que las transformaciones no se conquistan de inmediato en el nivel *inter-*, sino que exigen una construcción progresiva. Como lo muestra el siguiente diálogo, en la etapa *intra-* puede llegarse incluso a negar la reciprocidad como en el caso de la relación elemental de "hermano": "—¿Tienes tú un hermano?—. —Sí, es Federico—. —Y Federico ¿tiene un hermano?—. —No. Somos nosotros dos solos en la familia."

Dificultades análogas se encuentran luego con la relación de "primo" y con las relaciones "sobrino" y "tío". Hay, naturalmente, reciprocidades mucho más complejas, como las reciprocidades entre variables solidarias pero antagónicas, tales como la acción y la reacción, en mecánica.

c] El nivel trans-operacional es fácil de definir, en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras", aunque permaneciendo en el plano de las acciones, que aunque están interiorizadas, no han sido tematizadas. La más notable de ellas es la que reposa en el conjunto de las partes, sin limitarse a clases y relaciones disjuntas o imbricables. El conjunto de las partes reúne en una misma totalidad las inversiones y las reciprocidades, o sea las dos

formas de reversibilidad: en este caso, la "estructura" lograda es la de un auténtico "grupo" que ha sido denomiado *INRC*. En efecto, dada una operación como $p \rightarrow q$, se la puede dejar tal cual es (lo cual constituye la "operación" identidad *I*); se la puede invertir en $N = p \cdot \bar{q}$; o bien transformarla en su recíproca $R = q \rightarrow p \ (= \bar{p} \rightarrow \bar{q})$ o en su correlativa $C = \bar{p} \cdot q$. De aquí se deduce fácilmente: $NR = C$; $NC = R$; $CR = N$; y $NCR = I$. Va de suyo que esta formulación corresponde al observador, pero que los sujetos, desde los 11-12 años, construyen tales síntesis por composición en acciones e inferencias progresivas cuando se trata de coordinar inversiones y reciprocidades en un mismo sistema total. Un ejemplo elemental es el de las balanzas con brazos donde se pueden aumentar o disminuir los pesos, dejándolos en el mismo lugar, o bien compensar un peso situado cerca del centro por un peso más ligero situado a una distancia más grande. Otro ejemplo sería el de los movimientos relativos con coordinación necesaria de los dos referenciales.

Quedan por examinar dos problemas, el primero de los cuales es puramente terminológico. Hemos convenido, en la obra presente, reservar el término de "estructuras" para aquellas que comportan síntesis de transformaciones distintas, como lo son las inversiones y las reciprocidades en el ejemplo arriba descrito. En tales situaciones se trata evidentemente de sistemas "trans-operacionales" puesto que se rebasan las fronteras de cada una de las transformaciones constituyentes. Sin embargo, la epistemología genética ha considerado los "agrupamientos" —y esto sigue siendo válido— como siendo ya estructuras, aun cuando permanezcan limitadas por el hecho de que su composición procede por elementos próximos (de donde surge la noción "sucesor inmediato" utilizada por Wermus en su axiomatización de los agrupamientos). A fin de evitar todo equívoco, distinguiremos pues las estructuras por generalizaciones e interacciones, ya elaboradas al nivel *inter-*, y las estructuras sintéticas del nivel *trans-*, designadas aquí, para abreviar, con el solo término de "estructuras".

Pero el problema esencial que nos resta por resolver es el relativo al motor que torna necesario el pasaje del *intra*-operacional al *inter*-y luego al *trans-*, así como las relaciones entre este dinamismo constructivo y el proceso general que conduce del simple empleo de una operación a la construcción de "operaciones sobre operaciones". Para facilitar la discusión de estas cuestiones, puede ser útil recordar algunos otros hechos que muestren lo que el sujeto puede extraer de los agrupamientos más simples (seriaciones y clasificaciones) cuando llega a las conductas intermediarias entre los agrupamientos propios del nivel *inter-* y las síntesis del nivel *trans*-operacional.

II. LA SERIACIÓN Y LA CLASIFICACIÓN

Si se dan al sujeto algunas regletas desiguales y se le pide que las "arregle bien", será capaz de construir la serie A B C. . . como si fuera una "escalera", desde los niveles preoperatorios *intra-*. Sin embargo, el mismo niño no sabrá cómo construir una sucesión con otros objetos, como por ejemplo círculos de diámetro diferente. El sujeto permanece en la etapa "intra-operacional" en tanto que la forma elaborada permanezca de carácter local y ligada a ciertos contenidos. Habrá, por el contrario, generalización *inter*-operacional cuando la seriación sea utilizada a título de instrumento cognoscitivo para el análisis de contenidos variados, como en el caso de una serie de polígonos de número creciente de lados. En cuanto al *trans*-operacional, consiste en componer entre sí dos seriaciones distintas para extraer una operación más rica y más "fuerte". Éste es el caso de la experiencia siguiente: se dan al niño un conjunto de pececitos de diversos tamaños y un cierto número de bolitas de alimentos de tamaños también variados; la consigna es distribuir el alimento en función de las necesidades de los peces. En este caso, los sujetos de un cierto nivel van a seriar los peces según sus dimensiones, y las bolitas de alimentos según las suyas, y luego pondrán las dos series en correspondencia término a término. Ésta es la forma más simple en que el niño descubre la noción de proporción.

Por muy triviales que parezcan estos hechos, muestran que una operación, una vez constituida, y por muy próxima que permanezca de las acciones corrientes (como es una ordenación), no se queda largo tiempo inerte y aislada (*intra-*) sino que tarde o temprano constituye un nudo de estructuraciones en las direcciones *inter-* y *trans-*, que se prolongan luego indefinidamente hasta la construcción de las estructuras propiamente dichas.

Tomemos ahora el ejemplo de las clasificaciones. La forma más directa de relaciones intra-operacionales consiste en reunir objetos similares en una clase A_1, que se puede incluir en B, pero de tal manera que existan algunos elementos de B *que no son* A_1 y que constituyan la clase que designaremos por A_1' (de aquí puede seguir la serie posible $C = B + B'$, etc.). Un progreso en la dirección inter-operacional se impone ulteriormente cuando el sujeto descubre que su repartición de B en A_1 y A_1' no se impone como una necesidad única, y que los elementos pueden ser distribuidos en función de otros criterios. En este caso, la misma clase B puede comprender las subclases $A_2 + A_2'$, tal que A_2 pertenece a lo que era A_1' (por ejemplo) en la primera clasificación y que las A_2' son las complementarias de A_2 bajo el conjunto B, en el mismo sentido que las A_1' eran complementarias de A_1. Las A_2' son pues "las otras", con respecto a la clase de partida A_2 y al total B, como las A_1' eran también "las

otras". Pero no se trata ya más de las mismas "otras", y este término adquiere entonces un sentido esencialmente relativo. Estos cambios de clasificación referidos a los mismos elementos han sido llamados "vicariancias". El agrupamiento de vicariancias es importante, sobre todo en casos como la elaboración de relaciones de parentesco donde se ha visto que lo inter-operacional predomina sobre lo intra-operacional.

El interés de las vicariancias reside, sobre todo, en lo siguiente: Si bien ellas completan muy de cerca las primeras conductas clasificatorias son en principio realizables solamente en la medida en que se trata de modificaciones sucesivas de una clase inicial, sin reunión de las diversas posibilidades en una totalidad simultánea. Por ejemplo, un cierto número de objetos pueden ser clasificados según sus formas, sus tamaños o sus colores. En un nivel elemental, el sujeto no ve las intersecciones posibles entre los tres tipos diferentes de subclases que se limita a construir sucesivamente. Al avanzar en su desarrollo, será capaz de encontrar sin dificultad tanto "cuadrados rojos pequeños" como "redondeles azules grandes", etc. y ver que una de estas colecciones es más numerosa que la otra. Pues bien, esta capacidad de diferenciaciones y de imbricaciones simultáneas llega tarde o temprano a la combinatoria 2^n, o en otros términos, al "conjunto de las partes", pero en acciones, sin cálculo ni tematizaciones.

Los dos ejemplos que acabamos de citar presentan un carácter común que es fundamental en la construcción de los sistemas de acciones prealgebraicos: es el proceso que consiste en pasar de las relaciones simples a las relaciones entre relaciones. En el caso de las dos seriaciones $A_1 < A_2 < A_3 \cdots$, y $B_1 < B_2 < B_3 \cdots$, que reposan ambas sobre las relaciones de tamaño $x < y$, su puesta en relación conduce a equivalencias cuantitativas de la forma $A_1/B_1 = A_2/B_2$, y la composición de estas dos clases de relaciones alcanza al sistema de proporciones, cuya importancia es esencial y que se generalizará hacia los 11-12 años. En el caso de la combinatoria que corresponde al conjunto de las partes (accesible también a las mismas edades), la composición de las relaciones en juego toma asimismo una forma que rencontramos en numerosas ocasiones: la elevación de una operación a una potencia superior. Una combinatoria no es, en efecto, sino una clasificación de todas las clasificaciones posibles para un material dado.

III. LA NATURALEZA DEL INTRA-, DEL INTER- Y DEL TRANS-

Está claro que esta triada constituye una sucesión dialéctica, pero esto no explica nada a menos de precisar que procede de una manera que le es propia, por superación de los instrumentos mismos de rebasamiento.

Convengamos primero en designar, en forma abreviada, el nivel

intra- por el símbolo *Ta*, el *inter-* por *Tr*, y el *trans-* por *T*. La triada completa se escribe pues *TaTrT*. Es conveniente notar que esta triada *TaTrT* implica siempre la construcción de operaciones sobre operaciones, pero sin que la recíproca sea verdadera. Notemos, además, que la sucesión *TaTrT* obedece a un orden necesario, puesto que la elaboración de *T*, en tanto sistema de todas las transformaciones reunidas en una totalidad con propiedades nuevas, supone la formación de algunas de esas transformaciones en *Tr*, y que estas últimas implican el conocimiento de los caracteres analizados en *Ta*.

Este orden necesario de sucesión comporta entonces dos formas de rebasamientos o superaciones dialécticos, uno de los cuales agrega a las propiedades analizadas en *Ta* las transformaciones elaboradas en *Tr*, mientras que el otro sintetiza en *T* el sistema de transformaciones hasta constituir totalidades cuyos caracteres de conjunto son, a su vez, nuevos con respecto a *Tr*. Pero cualesquiera que sean los contenidos sobre los cuales reposan estas formas sucesivamente construidas —clasificadas bajo los rubros *Ta*, *Tr* o *T*, con sus rebasamientos respectivos de *Tr* con respecto a *Ta*, y de *T* con relación a *Tr*— dichas elaboraciones comportan a todos los niveles procesos psicogenéticos o históricos comunes, y por consiguiente generales, que podemos caracterizar sumariamente como sigue.

En primer lugar, una fase previa y necesaria es aquella del análisis de casos particulares que no están vinculados entre sí, o lo están pero insuficientemente (fase *Ta*). En segundo lugar, la comparación de los casos particulares analizados conduce a la construcción de transformaciones al poner en evidencia tanto las diferencias como las correspondencias (*Tr*). Estas últimas, una vez dominadas y generalizadas permiten nuevas síntesis *T*, o sea totalidades hasta entonces inaccesibles, con sus nuevas propiedades de conjunto. Es necesario precisar que estas tres fases, con sus características propias, son de naturaleza funcional y no estructural. Son, por consiguiente, comunes a todos los niveles, y no especiales a algunos de ellos o, si se prefiere, inherentes a toda construcción y no ligados a ciertos dominios o niveles. Más exactamente, se limitan a describir el aspecto psicodinámico general de los rebasamientos superadores sin considerar ninguno en particular.

Si esto es así, va de suyo que nuestras descripciones en términos de *Ta*, *Tr* y *T* están vinculadas a cuestiones de escala y que, como hemos dicho al comienzo de este capítulo, cada una de estas grandes etapas encierra subetapas tales que se puede distinguir, por ejemplo en el nivel *T*, lo que hemos designado como fases "trans-intra", "trans-inter" y "trans-trans". Un caso histórico bien claro a este respecto es el de la teoría de las "categorías" que, tomadas en su conjunto, pertenecen evidentemente al nivel *T* con respecto a las fases anteriores del álgebra. Si consideramos la formación de esta teoría

actual, es evidente que comenzó por una fase "trans-intra" limitada al análisis de ciertas correspondencias; luego se constituyó una fase "trans-inter" con el estudio de las transformaciones entre los morfismos; finalmente, con el descubrimiento de los funtores, se impuso una teoría general de las categorías, caracterizando así un nivel "trans-trans".

Estas jerarquías cognoscitivas comportan dos tipos de imbricaciones. Unas son proactivas, por ampliación de los dominios en el curso de períodos sucesivos de la construcción de los conocimientos. Pero otras son retroactivas, puesto que lo que se adquiere en un nivel n puede enriquecer *a posteriori* las relaciones ya establecidas en niveles anteriores $n-1$, $n-2$. Un ejemplo claro lo encontramos en la química, donde las explicaciones electrónicas han logrado una completa renovación del concepto de valencia.

Siendo así, nos parece posible concluir que las series *TaTrT* no consisten en rebasamientos simples, o sea lineales, como encontramos en toda sucesión dialéctica elemental, sino que debemos de hablar de rebasamientos continuos de los instrumentos mismos de rebasamiento, y es eso lo que confiere a los instrumentos cognoscitivos su riqueza y su complejidad particular. Desde este punto de vista, el álgebra, en tanto teoría de las formas y de las estructuras, constituye el modelo privilegiado que provee una teoría adecuada y general de la inteligencia o del conocimiento, puesto que solamente esta interpretación algebraica de la razón humana nos libera del doble escollo del empirismo y del apriorismo. Podríamos incluso llegar a sostener que las sucesiones *TaTr* y *T* hunden sus raíces en la biología: son ellas las que justifican el sueño de un construccionismo integral que ha de ligar, a través de todos los intermediarios necesarios, las estructuras biológicas que están en el punto de partida y las creaciones lógico-matemáticas que se encuentran en el punto de llegada.

CAPÍTULO VII
EL DESARROLLO DE LA MECÁNICA

Algunas de las características más sobresalientes de la transición entre la física aristotélica medieval y la mecánica que se desarrolla en el siglo XVII ya fueron indicadas en el capítulo I. Las investigaciones históricas recientes han puesto en evidencia que la gran actividad científica desarrollada durante los últimos siglos de la Edad Media nos obligan a situar esta transición en una perspectiva diferente de la que constituyó la versión histórica dominante en el siglo XIX y en la primera mitad del siglo XX, versión todavía utilizada en algunos textos de física. Ahora sabemos que el "método científico" no fue una conquista del siglo XVII; que, por el contrario, tal método tenía ya en ese momento una larga tradición y había logrado un notable grado de desarrollo; que si bien la revolución científica contribuyó a un notable avance en la elaboración de dicha metodología científica, su principal contribución no se encuentra en la metodología, y no es tampoco la metodología misma lo que constituyó la fuente de esta evolución. El método científico permanece subordinado a la concepción del mundo y a la naturaleza de los problemas formulados. Es en la concepción del mundo y en la naturaleza de los problemas, y no en la metodología, donde se sitúa la diferencia fundamental entre Oresme y Galileo. Esto ha sido expresado de manera muy pertinente por el historiador Crombie de la manera siguiente: "Los procedimientos de la ciencia son métodos destinados a responder a cuestiones relativas a los problemas; las cuestiones proveen una definición de los fenómenos, *y los constituyen en problemas*" (cursivas nuestras).

La distinción que hemos hecho entre una metodología científica apropiada y el marco epistémico (es decir los presupuestos epistémicos que dirigen la aplicación de la metodología) nos ha permitido centrar la interpretación de la transición que nos ocupa en los cambios de marco epistémico, poniendo así de relieve (como lo hemos hecho en los capítulos que preceden) un notable paralelismo entre los procesos históricos y el proceso psicogenético de desarrollo de las explicaciones de los fenómenos empíricos. Tanto en la psicogénesis como en la evolución de la mecánica pregalileana, el paralelismo tiene que ver a la vez con el contenido del pensamiento y con los mecanismos que actúan en la elaboración de los conceptos.

I. LA MECÁNICA NEWTONIANA

A partir de Newton nuestra problemática cambia. El nivel de abstracción y la complejidad conceptual propias de la mecánica newtoniana y de sus prolongamientos históricos (mecánica de Lagrange y de Hamilton, hasta la mecánica cuántica) escapan naturalmente a los contenidos que se pueden estudiar en la psicogénesis del pensamiento físico en el niño y en el adolescente. Aquí, como lo hemos hecho en el caso de las matemáticas, nuestro estudio debe centrarse en los mecanismos que controlan el proceso de transición de una etapa a otra del desarrollo histórico, así como en sus relaciones con los mecanismos de "rebasamiento" que permiten pasar de una etapa a la siguiente en el desarrollo congnoscitivo individual. Es la razón por la cual en este capítulo sólo haremos referencia al contenido de los conceptos utilizados en cada una de las etapas de la evolución de la mecánica, en los casos donde tal referencia sea indispensable para indicar lo esencial de la estructura de una teoría y la significación del pasaje de una etapa a la siguiente.

Centraremos nuestro análisis en la mecánica de Newton. La primera edición de *Principia Mathematica* es de 1686. El siglo XVII ya está, por consiguiente, bien avanzado. Antes de esta fecha, Galileo, Descartes y Huygens fueron los protagonistas de un proceso que encuentra su culminación en Newton (proceso sin el cual Newton mismo sería difícilmente comprensible). Sin embargo los historiadores de la ciencia están lejos de ponerse de acuerdo con respecto al papel exacto de cada uno de los protagonistas en esta revolución científica.

Durante todo el siglo XIX y gran parte de la primera mitad del siglo XX, se tendió a considerar a Galileo como el actor principal y como quien verdaderamente forjó la revolución científica. La mecánica de Newton no sería así más que un corolario de la obra de Galileo. Sin embargo, las investigaciones históricas sobre el desarrollo de la ciencia medieval han contribuido a menguar un tanto esta visión de las cosas. Sin llegar a disminuir el innegable genio de Galileo, podremos decir, desde nuestra perspectiva, que la obra de este último no constituye una creación espectacular sin precedentes, sino, sobre todo, un gran paso adelante en el desarrollo de una línea que tiene sus raíces en el "quatrocento" en París y en Oxford y que, pasando por la Universidad de Padua, conduce a Galileo. Según esta perspectiva, Galileo no sería sino un "corolario" del siglo precedente, mientras que el gran creador de la mecánica —llamada hoy "clásica"— sería Newton.

La "demistificación" de Galileo es de una importancia considerable para nuestro punto de vista de la historia concebida como laboratorio epistemológico. Decir que Galileo no realizó la "experiencia" de lanzar objetos de peso diverso desde lo alto de la torre de Pisa a fin

de verificar si llegaban todos al suelo al mismo tiempo, no es solamente proceder a la rectificación histórica de un episodio creado, según todas las evidencias, por sus admiradores. Señalar que fue Stevin quien realmente efectuó una experiencia similar, medio siglo antes, sin haber producido el menor efecto entre sus contemporáneos, es mucho más que rendir homenaje a un personaje todavía mal conocido del siglo XVI. En los dos casos se trata de informaciones muy significativas para la concepción de la historia de la ciencia en tanto laboratorio de epistemología. Galileo no tuvo necesidad de efectuar la experiencia: su concepción de la caída de los cuerpos le permitía inferir el resultado. Por el contrario, la experiencia de Stevin —que por sí misma destruía en buena parte las especulaciones aristotélicas medievales— no tuvo repercusiones por la ausencia de un marco conceptual que permitiera insertar esta experiencia dentro de un sistema explicativo.

Dicho esto, podemos ahora justificar con mucha más precisión por qué vamos a centrar nuestro análisis en la obra de Newton: la mecánica newtoniana es el *sistema* que va a sustituir al *sistema* de Aristóteles en la descripción y la interpretación de las leyes del movimiento; es, además, el primer sistema que exhibirá alguna de las propiedades fundamentales que llegarán a ser luego la marca de la "cientificidad" por excelencia.

Ya hemos dicho hasta qué punto es importante tomar en consideración un sistema, en lugar de un conjunto de leyes *ad hoc*, y volveremos sobre la importancia de estas consideraciones. Nos detendremos ahora en aquellas características de la mecánica newtoniana que harán de ella el paradigma de las ciencias empíricas, hasta el punto que Von Helmholtz llegará a decir, a fines del siglo pasado, que ninguna explicación en ciencias de la naturaleza era claramente inteligible a menos que estuviera expresada en términos de los principios de la mecánica de Newton.

No es éste el momento de hacer un análisis detallado de los principios de la mecánica newtoniana. Nos limitaremos a aquellos aspectos del sistema inherentes a los *Principia* que tienen consecuencias directas para nuestro análisis epistemológico.

Comencemos por el principio de inercia. Los historiadores de la ciencia se dividen en los que atribuyen a Galileo la primacía en el "descubrimiento" de este principio y los que atribuyen a Descartes dicho descubrimiento. No ha faltado un intento de establecer un compromiso a través de una tercera vía. Ésta consiste en admitir dos proposiciones:

a] "Galileo no tenía la concepción moderna de movimiento inercial como velocidad uniforme en línea recta",[1] puesto que "según el principio de inercia de Galileo, si la superficie de la Tierra fuera

[1] S.F. Mason, *A history of the sciences*, Nueva York, MacMillan, 1962, p. 163.

completamente uniforme, una esfera puesta en movimiento en dicha superficie continuaría rodando alrededor de la Tierra indefinidamente".[2]

b] "Descartes mejoró la versión de Galileo sugiriendo que el movimiento natural toma la forma de movimiento con velocidad uniforme en una línea recta, y no en una circunferencia como suponía Galileo."[3]

De aquí se podría concluir que Newton no agregó prácticamente nada nuevo a la concepción cartesiana. El mismo Alejandro Koyré, con toda su autoridad, se aproxima a esta línea de argumentación: "Hoy la concepción clásica —galileana, cartesiana, newtoniana— del movimiento no sólo nos parece evidente, sino incluso 'natural'. Y, sin embargo, esa 'evidencia' es todavía muy reciente: apenas tiene tres siglos. Y es a Descartes y a Galileo a quienes se la debemos."

Es cierto que Koyré agrega inmediatamente después que "el principio de inercia no salió ya elaborado del pensamiento de Descartes o de Galileo como Atenea de la cabeza de Zeus. La revolución galileana y cartesiana —que no deja de ser una revolución— requirió una larga preparación".[4] Sin embargo, el pasaje de la inercia en el sentido cartesiano a la ley de Newton no es evidente ni directo. En este sentido, la "larga preparación" que conduce a la ley de inercia no tiene a Galileo ni a Descartes como puntos de terminación; ellas también forman parte del largo camino que habrá de culminar con Newton. Como lo ha hecho notar Bernard Cohen, la idea de inercia de Galileo está lejos de ser precisa. Si bien en ciertos textos hace referencia a un concepto de movimiento inercial circular, en otros parecería contradecirlo. En efecto, hay en estos textos muchas referencias al hecho de que, dadas las dimensiones de la Tierra, un movimiento horizontal que coincida estrictamente con un arco de círculo máximo puede ser considerado como rectilíneo. Si ponemos juntas las referencias a este problema que se encuentran en los textos de Galileo, es posible extraer tres conclusiones: *a*] no hay pruebas suficientes para decidir si Galileo concebía en forma definitiva una inercia rectilínea o bien una inercia circular; *b*] parecería que Galileo nunca llevó su reflexión mas allá de los movimientos de extensión limitada, lo que permitiría explicar la indefinición precedente; *c*] la idea de un movimiento inercial suficientemente alejado de la influencia de la Tierra no aparece en ninguna de las referencias.

De aquí resulta que, como señala con justa razón Bernard Cohen, fueron necesarias varias transformaciones para pasar, a través de

[2] Ibid., p. 162.

[3] Ibid., p. 169.

[4] A. Koyré, *Études Galiléennes*, París, Hermann, 1966, p. 164 [*Estudios galileanos*, México, Siglo XXI, 1980, p. 152].

Descartes, de los conceptos galileanos a la ley de inercia de Newton.[5] Según este autor, las transformaciones necesarias han sido las siguientes:

1] establecer con precisión que la inercia es exclusivamente rectilínea;

2] ampliar la consideración de los movimientos que tienen lugar sobre planos próximos a la superficie de la Tierra a todos los movimientos rectilíneos (sin "apoyo" sobre ningún plano);

3] concebir que en el mundo real los movimientos inerciales pueden continuar indefinidamente;

4] establecer como axioma que el movimiento inercial es un "estado";

5] asociar la inercia y, en consecuencia los movimientos inerciales, con la masa en tanto cantidad de materia.

Cohen estima que Newton, junto con Descartes, contribuyó a la segunda y la cuarta de estas cinco "transformaciones". La quinta sería la contribución original de Newton. Aquí se detiene el análisis de Cohen en tanto historiador. Éste es nuestro punto de partida para comenzar el análisis epistemológico.

Los puntos cuatro y cinco arriba indicados son particularmente pertinentes para dicho análisis e indican en qué sentido es necesario atribuir a Newton —y no a Descartes— el mérito de haber establecido el concepto de inercia sobre bases suficientemente sólidas para convertirlo en el fundamento de la "mecánica clásica".

La diferencia entre la mecánica aristotélico-medieval y la mecánica clásica ha sido a menudo presentada como una diferencia en la concepción del movimiento. Para la primera, el movimiento es un estado: en efecto, la tradición aristotélica exige la presencia permanente de un *motor* sin lo cual no se podría dar cuenta del movimiento. Sin embargo, Dijksterhuis ha hecho notar que esta diferencia no puede aplicarse sino al movimiento rectilíneo y uniforme, puesto que en todos los otros movimientos las dos mecánicas exigen la presencia de un "motor".

Decir que el movimiento rectilíneo y uniforme constituye un estado, y no un proceso, equivale a decir que no tiene necesidad de la presencia de un motor. Descartes llegó a esta idea, pero esta concepción no dará frutos sino cuando Newton le haya dado un sentido cuantitativo preciso y le haya conferido una significación relacional. En lo que respecta a este punto nos alejamos de Dijksterhuis (con quien, por otra parte, estamos en general de acuerdo). Retomemos el pensamiento de este autor. Su punto de vista es el siguiente: apoyar o negar la tesis según la cual el movimiento inercial no es un proceso

[5] I. Bernard Cohen, "History and the philosopher of science", en F. Suppe (comp.), *The structure of scientific theories*, University of Illinois Press, 1977.

depende enteramente de la propia actitud filosófica de cada uno. Él lo expresa así: "Cuando alguien cree en la existencia de un ESPACIO ABSOLUTO y de un MOVIMIENTO ABSOLUTO en el sentido newtoniano, considerando el segundo como cambio de lugar absoluto; y cuando luego, apoyándose en el principio de la causalidad, se interroga sobre la causa de este cambio y lo atribuye a la Cantidad de Movimiento Inicial, no tendrá la menor objeción en establecer una relación estrecha entre cantidad de movimiento e impetus, a menos que se decida considerar la inercia como la causa de la persistencia del movimiento rectilíneo. En este último caso, podrá apelar a la autoridad de Newton, puesto que éste atribuye explícitamente el movimiento inercial a una Vis Inertiae, *Fuerza de Inercia*, que reside en el cuerpo mismo."[6]

Esto conduce a Dijksterhuis a concluir que aun a Newton se le puede considerar que forma parte de los que conciben el movimiento como proceso. Si esto fuera cierto, debería establecerse una nueva diferencia entre la mecánica newtoniana (todavía tributaria de la física medieval) y la mecánica clásica, tal como la concebimos hoy.

Nosotros creemos que la afirmación de Dijksterhuis está justificada, pero a condición de tomar *solamente* en consideración el texto de la definición III de los *Principia*:

"La *vis insita*, o fuerza innata de la materia, es un poder de resistencia por el cual todo cuerpo continúa en su estado presente, sea de reposo o de movimiento uniforme en línea recta." (En la explicación que sigue, Newton aclara que dicha *vis insita* puede, con un nombre más significativo ser llamada inercia [*vis inertiae*].)

El problema es que esta definición *no corresponde a la ley de inercia*. Cuando Newton enuncia la ley de inercia no utiliza la vis inertiae:

"Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta, a menos que sea compelido a cambiar ese estado por fuerzas impresas sobre él."

No hay aquí, como se ve, la menor traza de "movimiento-inercial, como proceso".

Lo que nosotros afirmamos es que esta ley no puede ser tomada como un enunciado aislado. Forma parte del conjunto de las tres leyes que constituyen los axiomas que Newton toma como punto de partida. No hay que olvidar que él es heredero directo de Euclides y que sabe muy bien que un sistema axiomático es, precisamente, un *sistema*. El *scholium* que sigue a las tres leyes y a sus seis corolarios comienza así:

"Hasta aquí he formulado aquellos principios que han sido admitidos por matemáticos, y han sido confirmados por abundantes experimentos.

[6] E.J. Dijksterhuis, "The origins of Classical Mechanics from Aristotle to Newton", en Marshall Claget (comp.) *Critical problems in the history of science,* The University of Wisconsin Press, 1959.

Por medio de las dos primeras leyes y de los dos primeros corolarios, Galileo descubrió que el descenso de los cuerpos variaba como el cuadrado de los tiempos y que el movimiento de los proyectiles seguía la curva de una parábola; la experiencia estuvo de acuerdo con ambos."

¿Podemos tener dudas sobre la intención de Newton? Él concibe sus "axiomas, leyes de movimiento" (título que él da a esta sección de los *Principia*) como cumpliendo la misma función que los axiomas de Euclides habían cumplido con respecto a todos los teoremas demostrados por sus predecesores. Por esta razón parece absolutamente necesario leer la primera ley *dentro del contexto* de las otras leyes. Si se toman las dos primeras leyes simultáneamente se ve claramente en qué sentido Newton transforma (según la expresión de Cohen) la concepción de Descartes. El *estado* de movimiento (reposo o movimiento rectilíneo uniforme) está caracterizado por un valor preciso de una cantidad bien definida: mv. La segunda ley indica cómo se modifica dicho estado.

Lo que precede lleva a considerar con más detalle la segunda ley de Newton. La primera lectura de los *Principia* depara a todo lector la misma sorpresa: no se encuentra allí el enunciado de la ley bajo la fórmula $F = ma$, ni ninguna de sus variaciones bajo forma diferencial, tal como se la encuentra en los textos de física donde figura la "fórmula de Newton". En su versión inglesa la ley se expresa así:

"El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motora impresa (*motive force impressed*); y es realizado en la dirección de la línea recta en la cual esa fuerza es impresa."

Este enunciado, junto con el comentario que le sigue como esclarecimiento de la ley, ha conducido a creer que Newton se inspiró en las leyes del impulso (ya estudiadas por Wren, Wallis y Huygens), y que la expresión *motive force impressed* no tiene nada que ver con la versión moderna de impulsión, y menos aún con la de "fuerza instantánea".[7] Tal interpretación ignora enteramente la definición IV en la que Newton define lo que él entiende por *impressed force* y el comentario que sigue a la definición, en el cual dice explícitamente que: "las fuerzas impresas son de diferentes orígenes, como de percusión, de presión, de fuerza centrífuga" (y agrega luego la gravedad entre las fuerzas centrífugas en el comentario a la definición V). Tal interpretación tampoco toma en consideración el *uso* que hace Newton de esta ley a través de los numerosos problemas resueltos en los tres libros de los *Principia*. Por otra parte, el análisis de Cohen muestra, sin controversia posible, cuál es la interpretación justa del texto newtoniano y la forma de ponerlo en relación con la versión más moderna de la segunda ley.

[7] B. Ellis, "The origin and nature of Newton's Laws of motions", en R.G. Colodny (comp.), *Beyond the edge of certainty*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1965.

De todo lo que precede resulta que, aunque la fórmula $F = ma$ (o cualquiera de sus variantes) no se encuentre con esta forma en los *Principia*, expresa convenientemente el contenido de la segunda ley de Newton en su formulación original (sin que constituya sin embargo una traducción directa). Resulta también que esta segunda ley, en su formulación original, hace referencia a *impressed forces* cuyos orígenes son diversos (percusión, presión, fuerzas centrífugas tales como la gravedad, etc.). Precisamente esto constituye nuestro punto de partida para una interpretación epistemológica de la segunda ley.

1. *La definición de la masa*

La interpretación más general de las leyes newtonianas del movimiento, que prevalece aún en nuestros días en muchos libros de texto, se debe a Mach. Según esta interpretación, la tercera ley de Newton permite definir la masa y, a partir de esta definición, la segunda ley se convierte simplemente en una definición de fuerza. Es pertinente por consiguiente, plantearse el problema de la validez de estas dos afirmaciones.

El procedimiento seguido por Mach es el siguiente. Supongamos dos partículas de masas m_1 y m_2 (cuya relación debemos determinar) que ocupan, en un momento dado, las posiciones P_1 y P_2. Llamemos a_{12} a la aceleración producida sobre la partícula de masa m_1 por la partícula de masa m_2; designemos con a_{21} la aceleración producida sobre la partícula de masa m_2 por la partícula de masa m_1. En virtud de la tercera ley de Newton tendremos las siguientes relaciones:

P_1 ● ⟶ a_{12} $\qquad$ a_{21} ⟵ ● P_2 $\qquad$ $m_1 a_{12} = -m_2 a_{21}$

(m_1) $\qquad\qquad$ (m_2)

es decir:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_{21}}{a_{12}}$$

Si tomamos la partícula de masa m_2 como referencia (es decir, como unidad de masa), la masa m_1 quedará entonces determinada de manera unívoca por la observación de las aceleraciones de ambas partículas en un momento dado. Designaremos con la notación m_{12} al número que representa el valor de la masa de la partícula P_1 con respecto a la masa de la partícula P_2, es decir:

$$m_{12} = -\frac{a_{21}}{a_{12}}$$

Podríamos, según esta fórmula, aceptar la proposición de Mach

según la cual la relación entre las aceleraciones de dos partículas "define" la masa de una de ellas con respecto a la otra. Sin embargo, nada nos permite todavía suponer que la masa así "definida" sea una propiedad intrínseca de la partícula. Para que sea así, deberíamos estar en condiciones de demostrar que el valor de la relación $m_{12} = \frac{m_1}{m_2}$ es constante para cualquier sistema de partículas dentro del cual se encuentren dichas masas. Debemos pues considerar qué ocurre cuando hay más de dos partículas.

Si hay más de dos partículas en el sistema considerado, es absolutamente necesario considerar el carácter vectorial de las aceleraciones. Si designamos con $\vec{a}_{ij}$ al vector aceleración que mide, en magnitud y dirección, la aceleración producida por la partícula j sobre la partícula i, podemos considerar este vector como el producto de su valor absoluto a_{ij} y de un vector unitario $\vec{u}_{ij}$ que determina su dirección y sentido, es decir:

$$\vec{a}_{ij} = a_{ij}\,\vec{u}_{ij}$$

Esta aceleración no puede ser determinada por medio de observaciones, puesto que la sola cosa "observable" es la aceleración *total* $\vec{a}_i$ de la partícula P_i y no la aceleración parcial producida sobre P_i por cada una de las n partículas que constituyen el sistema. Sabemos pues, que

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{i1} + \vec{a}_{i2} + \cdots + \vec{a}_{in},$$

ecuación en la cual sólo el primer miembro es determinable por medio de observaciones. En consecuencia, tendremos n ecuaciones vectoriales de este tipo, una para cada partícula. Podemos escribir esto de manera sintética:

$$\vec{a}_i = a_{ij}\,\vec{u}_{ij} \qquad (i \neq j)$$

¿Cuál es entonces la significación de la aserción según la cual la relación entre la masa de una partícula P_i y la masa de una partícula de referencia, por ejemplo P_2, está determinada por la relación entre sus aceleraciones, suponiendo que ninguna otra partícula esté presente? Ello significa simplemente que deberíamos poder establecer

$$\frac{m_i}{m_2} = -\frac{a_{2i}}{a_{12}}$$

Pero esto equivale a poder determinar a_{2i} (que no es observable) a partir de las aceleraciones *totales* (observables) a_{2i}, a_i. En otros térmi-

nos, esto equivale a poder resolver el sistema de n ecuaciones vectoriales arriba indicado, en el cual las a_{ij} son las incógnitas, mientras que las a_i están dadas. La respuesta a este problema depende pues de la *existencia* y *unicidad* de la solución de dicho sistema de ecuaciones.[8]

El análisis del sistema permite arribar a las conclusiones siguientes:

a] Para $n = 3$ habrá, en general, dos ecuaciones diferentes para el par a_{ij} correspondiente a cada una de las tres partículas. La solución es única. De esta manera, la relación entre las masas puede ser determinada de manera unívoca (si las tres partículas no se encuentran sobre una misma recta).

b] Para $n = 4$ habrá, en general, tres ecuaciones diferentes para las tres a_{ij} correspondientes a cada partícula. La solución es única, si las cuatro partículas no están sobre el mismo plano.

c] Para $n > 4$ el número de ecuaciones algebraicas independientes en el sistema dado será todavía a lo sumo tres, para las $n - 1$ aceleraciones parciales a_{ij} correspondientes a cada partícula. El problema queda indeterminado, y las relaciones entre las masas de las partículas no pueden, por consiguiente, ser establecidas de manera unívoca.[9]

El problema anterior es modificado si consideramos un observador que determina las aceleraciones de las n partículas del sistema en momentos diferentes del tiempo. En este caso (que correspondería a situaciones de aceleraciones variables de un instante a otro) un análisis similar al anterior conduce a los resultados siguientes:

i] Para $n \leq 7$ se obtiene un sistema de acuaciones con solución unívoca, a condición de tener un número suficiente de "observaciones" de las aceleraciones de cada partícula en instantes diferentes. En tal caso las relaciones entre las masas se puede calcular de manera unívoca.

ii] Para $n > 7$, el sistema de ecuaciones es indeterminado y las relaciones entre las masas de las partículas no pueden ser establecidas aun cuando el número de instantes en los cuales se midieron las aceleraciones fuera muy grande.

El intento de determinar de manera unívoca las relaciones entre las masas de las partículas, sobre la base del principio de acción y reacción, conduce pues al fracaso. La interpretación que hace Mach de las leyes de Newton, según la cual la masa es definida por la tercera ley, de tal manera que la segunda ley pueda ser considerada como una definición de fuerza, no es aceptable.

[8] Cf. los artículos de C.G. Pendse en el *Philosophical Magazine*: "A note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics", XXIV, 1937; "A further note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics", XXIX, 1940.

[9] Cf. Pendse, *op. cit.*

Quedaría sin embargo la posibilidad de determinar *simultáneamente* los valores de la fuerza y de las relaciones entre las masas de un sistema de partículas dado, tomando ambas leyes al mismo tiempo, así como leyes derivadas de ellas.

Así reformulado el problema, el análisis muestra que, haciendo uso de las ecuaciones que corresponden a la conservación de la cantidad de movimiento, así como al momento de la cantidad de movimiento, es posible encontrar soluciones *para ciertos casos* en que $n > 7$. Estas soluciones corresponden a configuraciones particulares del sistema de partículas. No hay sin embargo soluciones para el caso general, ni criterios conocidos para establecer en qué caso un sistema admite o no una solución única.

Del análisis precedente resulta que las tres leyes clásicas de Newton no son suficientes para caracterizar de una manera completa las nociones de masa y de fuerza que constituyen los conceptos fundamentales en ellas involucrados. En consecuencia, haría falta introducir nuevos postulados o nuevas relaciones que permitieran llegar a la univocidad de los conceptos.

Pero la situación no es la misma para uno y otro concepto. En el caso de la masa, podríamos postular que se trata de una propiedad intrínseca de las partículas, es decir, de una propiedad cuyo valor numérico, para una partícula dada, se mantiene constante, cualquiera que sea el sistema al cual pertenece la partícula, y cualquiera que sea su posición y velocidad. Si agregamos pues el postulado de la constancia de la masa, podríamos determinar la masa de una partícula en situaciones simples (es decir, en los casos enunciados más arriba que sí tienen solución unívoca), y *atribuir* el mismo valor a todas las situaciones en las cuales se encuentre la partícula. Es obvio que no hay posibilidad de un postulado equivalente para el caso de la fuerza.

Las dificultades señaladas se ponen de manifiesto cuando se examina la forma un tanto imprecisa en la cual los textos hacen referencia al concepto de fuerza. Si tomamos, por ejemplo, la *Mecánica analítica* de Lagrange,[10] que es la cúspide de la mecánica newtoniana, encontramos la siguiente referencia al concepto de fuerza, con el cual comienza la obra.

"Se entiende, en general, por *fuerza* o *potencia* la causa, cualquiera que ella sea, que imprima o tienda a imprimir movimiento al cuerpo al cual se la supone aplicada; y es también por la cantidad de movimiento impreso, o presto a imprimir, que debe ser estimada la fuerza o la potencia. En el estado de equilibrio, la fuerza no tiene ejercicio actual; pero debe siempre ser medida por el efecto que pro-

[10] J.L. Lagrange, *Mécanique analytique*, primera parte: "La statique", primera sección.

duciría si no fuera detenida. Tomando una fuerza cualquiera, o su efecto, como unidad, la expresión de toda otra fuerza es sólo una relación, una cantidad matemática que puede ser representada por números o líneas; es desde este punto de vista que deben ser consideradas las fuerzas en la Mecánica."

Cuando Lagrange define la dinámica, el concepto de fuerza adquiere un poco más de precisión:

"La Dinámica es la ciencia de las fuerzas aceleratrices o retardatrices, y de los movimientos variados que éstas deben producir."[11]

Y más adelante agrega:

"Consideraremos principalmente las fuerzas aceleratrices y retardatrices cuya acción es continua, como la de la gravedad, y que tienden a imprimir en cada instante una velocidad infinitamente pequeña e igual a todas las partículas de materia. Cuando estas fuerzas actúan libre y uniformemente, producen necesariamente velocidades que aumentan con el tiempo; y podemos considerar las velocidades así engendradas, en un tiempo dado, como los efectos más simples de estas fuerzas y, por consiguiente, como los más apropiados para servirles de medida. Es necesario, en Mecánica, tomar los efectos simples de las fuerzas como conocidos; y el arte de esta ciencia consiste únicamente en deducir los efectos compuestos que deben resultar de la acción combinada y modificada de las mismas fuerzas."[12]

La expresión clave en la cita precedente se encuentra en la aserción: "Es necesario, en mecánica, tomar los efectos simples de las fuerzas como conocidos." En otros términos, es necesario identificar los diferentes *tipos de fuerza* o, lo que es equivalente, los diferentes tipos de sistemas de partículas, cada uno de los cuales está caracterizado por relaciones específicas entre aquéllas. Estas relaciones permiten postular la presencia de un cierto "efecto simple" o de un tipo particular de fuerza. El mismo Lagrange hace una primera clasificación de los diferentes tipos de sistemas:

"Se pueden clasificar en tres clases todos los sistemas de cuerpos que actúan unos sobre otros, y de los cuales se puede determinar el movimiento por medio de las leyes de la Mecánica, puesto que la acción mutua no puede ejercerse más que de tres maneras diferentes que nos sean conocidas: o por fuerzas de atracción, cuando los cuerpos están aislados, o por los vínculos que los unen o, finalmente, por la colisión inmediata."[13]

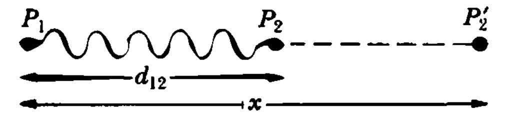
Esta primera clasificación, aun cuando resulta insuficiente, permite agrupar los sistemas de partículas en clases diferentes, cada una de las cuales está caracterizada como dominio de aplicación de fuer-

[11] Lagrange, *op. cit.*, segunda parte, "La Dynamique", primera sección.
[12] *Ibid.*
[13] Lagrange, *op. cit.*, tomo II, séptima sección.

zas distintas. En cada uno de estos dominios rige una *ley especial* (o un principio característico de dicho dominio). Hay pues leyes o principios que son válidos para situaciones particulares de una cierta clase de sistemas físicos, y que hay que tomar en cuenta para llegar a un concepto general. Veamos un ejemplo.

2. *El dominio de las fuerzas elásticas*

Si dos cuerpos P_1 y P_2 están vinculados entre sí por un resorte (con sus características propias), la fuerza que actúa sobre ellos, cuando se los separa de la posición de equilibrio, obedece a la ley de Hooke que puede ser expresada de la manera siguiente:



Sea d_{12} la distancia de equilibrio entre el resorte y las dos masas P_1 y P_2. Si se lleva, por ejemplo, P_2 a la posición P_2', separándolo de P_1 por una distancia x, la fuerza que actúa sobre cada una tendrá el valor

$$F_{12} = k_{12}(x_{12} - d_{12})$$

donde k es una constante que sólo depende del resorte.

Supongamos ahora que la masa m_1 está ligada a otras masas m_2, m_3 por medio de resortes del mismo tipo (es decir, ¡de resortes que obedecen a la ley de Hooke!). Las fuerzas que actúan sobre la masa m_1, cuando la situación de equilibrio es destruida, le imprimirán una aceleración a_1, de tal manera que utilizando conjuntamente la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$m_1 \vec{a_1} = k_{12}\vec{r_{12}} + k_{13}\vec{r_{13}}$$

donde los vectores $\vec{r_{ij}}$ tienen por magnitud la distancia $(x_{ij} - d_{ij})$.

En la medida en que la ecuación que acabamos de escribir es válida para cada posición particular de las tres masas, podemos repetir la experiencia tres veces, midiendo cada vez a_1, $\vec{r_{12}}$ y $\vec{r_{13}}$. Tendremos así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (m_1, k_{12} y k_{13}) que nos permite calcular m_1. De manera similar, se puede calcular m_2 y m_3, y en general cualquier número de masas ligadas entre sí por resortes.

La ley de Hooke determina, así, un nuevo tipo de sistemas que constituyen su dominio de aplicación.

3. *La imbricación de leyes particulares*

Hemos mostrado que las tres leyes generales de Newton no nos permiten caracterizar de manera única los conceptos de masa y de fuerza a los cuales hacen referencia las leyes. Por otra parte, en las secciones precedentes hemos dado ejemplos acerca de cómo proceder en sistemas para los cuales hay disponibles leyes particulares. Los ejemplos podrían ser multiplicados haciendo entrar en juego balanzas, máquinas de Atwood y péndulos de Cavendish. En cada caso se resuelven problemas específicos introduciendo un cierto tipo de suposiciones o admitiendo ciertas leyes especiales. La construcción que resulta adquiere, sin embargo, una gran coherencia que nos autoriza a considerar todos los sistemas con tales características como el dominio de aplicación de las leyes generales. ¿En qué está basado este tipo de generalización? ¿Con qué derecho hablamos de *la misma masa* con referencia a una partícula, sea ésta determinada por medio de resortes, de una balanza, o por una aplicación de la ley de gravitación? Esto es lo que nos resta aclarar para poder percibir con claridad el significado de las leyes de Newton. Pero la respuesta a estas preguntas tiene un alcance mayor ya que nos permite avanzar considerablemente en un tema tan central como es el de la construcción y el significado de una teoría física.

4. *La estructura de la mecánica clásica de las partículas*

Ya hemos señalado la multiplicidad de tipos de "sistemas de partículas"con respecto a las cuales las leyes de la mecánica newtoniana son válidas. Estos tipos de sistemas pueden ser caracterizados como el dominio de aplicación de ciertas leyes especiales.

Sin embargo, la mecánica newtoniana no se construye por simple yuxtaposición de dichos dominios. El hecho fundamental es la coherencia de la construcción total a la cual se arriba y que nos permite considerar todos estos dominios como subdominios del dominio de aplicación de las leyes generales de la mecánica newtoniana.

Esta multiplicidad, en el interior de la unidad, da cuenta del grado considerable de confusión que ha prevalecido durante toda la historia de la mecánica, y hasta una época relativamente reciente, cuando se ha considerado *el papel* de las leyes de Newton (y, en particular, la segunda ley). Hacia fines del siglo pasado, Poincaré intentó resumir la situación al afirmar: "Los principios de la dinámica nos parecieron en un comienzo verdades experimentales; pero nos hemos visto obligados a servirnos de ellos como definiciones."[14] Esta fórmula

[14] H. Poincaré, "Des fondements de la géométrie", *Revue de Metaphysique et Morale*, 1899.

de Poincaré muestra una diferencia de concepción importante con respecto a Mach o a Herbz, sin aportar, sin embargo, mayor esclarecimiento que dichos autores.

Será necesario esperar hasta nuestros días para encontrar la aceptación explícita de una posición más "ecléctica" según la cual la ley

$$F = m\frac{ds^2}{dt^2}$$

tiene varias "utilizaciones" distintas en mecánica. Probablemente sea en Russell Hanson donde podamos encontrar el análisis más claro de esta situación. Él identifica por lo menos cinco "utilizaciones diferentes" de la famosa "ley de Newton". Luego de detallar dicha lista, afirma:

"La utilización de $F = m\frac{d^2s}{dt^2}$ en la práctica presta apoyo a esa enumeración. Esto significa que no sólo hay entre los físicos aquellos que han sostenido una u otra de las interpretaciones, sino también que un físico en particular, en la misma jornada en su laboratorio, puede utilizar el enunciado $F = m\frac{d^2s}{dt^2}$ de todas las maneras antes enumeradas, sin la menor incoherencia."[15]

Sin embargo, este reconocimiento de la multiplicidad de funciones de la ley no es suficiente para explicar la estructura de la física newtoniana. El análisis penetrante de Russell Hanson, como el de otros filósofos de la ciencia que han escrito recientemente sobre este tema en términos similares, sirve para *enunciar* el problema, pero no lo resuelve.

Desde nuestro punto de vista, y tomando como base el análisis realizado en secciones precedentes, el problema puede ser formulado de la manera siguiente.

Cada una de las leyes particulares a las cuales hemos hecho referencia como aplicables a un tipo dado de "sistemas de partículas", tiene su propio dominio de aplicación. Nosotros no podemos aplicar resortes a los planetas, ni ponerlos sobre una balanza. Tampoco podemos aplicar la ley de gravitación a dos cuerpos cualesquiera que estén en un laboratorio, salvo en ciertas condiciones muy particulares. Pero ninguno de estos dominios está *aislado*. Todos tienen "regiones" de sus dominios que se encuentran imbricadas con otras. Tomemos un ejemplo.

D_1 D_2

[15] N. Russell Hanson, *Patterns of discovery*, Cambridge University Press, 1958.

Supongamos que D_1 es el dominio de aplicación de la ley de Hooke (es decir, que en D_1 se encuentran representados todos los sistemas cuyas masas están sometidas a fuerzas elásticas de un cierto tipo). Supongamos también que D_2 es el dominio de aplicación de la ley de gravitación (dominio al cual pertenece, por ejemplo, nuestro sistema planetario). La región común a los dominios D_1 y D_2 representa aquellos sistemas a los cuales las dos leyes son aplicables en una situación particular. Un ejemplo trivial es el caso de una masa suspendida de un resorte, cerca de la superficie de la Tierra. Sus oscilaciones deberán de estar de acuerdo con las dos leyes (la ley de Hooke y la ley de gravitación). Está por consiguiente justificado identificar las masas que hubieran podido calcularse al aplicar separadamente una y otra ley.

Estas consideraciones nos llevan a concebir la mecánica newtoniana como una estructura compleja construida a partir de dominios *imbricados entre sí*, dominios caracterizados por leyes o principios especiales pero que pueden ser subsumidos en el seno de un dominio global en el cual las tres leyes de Newton son válidas. Tendremos, por consiguiente que:

a] La masa y la fuerza que intervienen en la segunda ley son funciones teóricas a las cuales no se puede hacer corresponder ni una definición universal, ni la posibilidad de un solo método de determinación. Es en cada dominio de aplicación que la masa se hace determinable experimentalmente por un método apropiado, de la misma manera que hay para la fuerza una ley particular válida para cada dominio (ley de gravitación, ley de Hooke, etcétera).

b] La masa es considerada como una propiedad intrínseca de una partícula, propiedad que permanece invariante para cualquier dominio de aplicación de la teoría. Pero es una función de la estructura de la segunda ley que la masa recibe su propiedad de ser parámetro intrínseco de la partícula. En consecuencia, es la misma ley la que vincula entre sí los diferentes dominios, en una sola estructura, en lo que concierne a las relaciones entre masas, fuerzas y aceleraciones. Esta *síntesis* de los diferentes dominios *en una estructura única es construida por la teoría.* De esta manera, la teoría nos dice que las hipótesis concernientes a las diferentes formas que adoptan las funciones teóricas en los diversos dominios no son independientes entre sí.

II. REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS SOBRE LA EVOLUCIÓN DE LA MECÁNICA

1. *Observables, términos teóricos y teorías*

A fin de formular las conclusiones que podemos extraer del desarro-

llo histórico de la mecánica, al cual nos hemos referido en este capítulo, vamos a considerar separadamente los dos aspectos que constituyen una teoría física:

i] la estructura misma de la teoría;

ii] los elementos sobre los cuales opera dicha estructura y el tipo de "correspondencia" que puede haber entre ellos y la experiencia física.

Está claro que la separación es sólo metodológica y con la única intención de destacar aspectos que tienen características propias. La teoría, en tanto sistema explicativo, es una unidad integral donde dichos aspectos desempeñan un papel que responde a las leyes de la estructura como totalidad.

Aceptar una teoría física supone una puesta en relación entre un "marco teórico" (es decir, una cierta estructura formal), y un conjunto de "situaciones objetivas" (es decir, un conjunto de hechos o de objetos, con sus relaciones). El contenido empírico de una teoría puede ser expresado diciendo que el marco teórico a través del cual la teoría ha sido formulada es *aplicable* a una situación dada. Dicho de otra manera: el marco teórico es un modelo *adecuado* a la situación dada. Aquí utilizamos la palabra "modelo" con un sentido totalmente diferente del que tiene este vocablo en lógica y en matemáticas. En estas últimas, el término "modelo" designa una interpretación precisa de los términos no definidos de un sistema axiomático abstracto. Pero una teoría física constituye un sistema axiomático (o semiformalizado) *ya interpretado*. Es precisamente el conjunto del sistema abstracto *con* su interpretación lo que llamamos "modelo" de la realidad física (o, más precisamente, del dominio de la realidad física que intentamos explicar). Desde este punto de vista, "explicar" en física equivale a formular un modelo adecuado de un conjunto de fenómenos.

Aquí surgen, de inmediato, dos tipos de problemas:

a] ¿Cuáles son los *hechos* que se toman como punto de partida para definir o describir los fenómenos que se tratan de explicar?

b] ¿Cuáles son las características de los modelos que han sido históricamente aceptados como "adecuados", y cómo se llega a construir dichos modelos?

En lo que concierne al primer punto, el análisis que hemos hecho de la constitución de las teorías en la evolución de la mecánica nos lleva a formular las conclusiones siguientes:

1] Cada teoría corresponde a un "nivel" determinado de "abstracción" con relación a la realidad física. En cada nivel se toman como punto de partida ciertas propiedades de los objetos a los cuales se aplica la teoría. Estas propiedades constituyen los "observables" *para la teoría en cuestión.*

2] La caracterización de los observables no presenta en sí misma ningún problema filosófico ni metafísico; tampoco presupone la

aceptación de un *a priori* irreductible para la teoría en cuestión. La teoría se limita a reconocer que hay valores de ciertas variables, los cuales pueden ser obtenidos por procedimientos cuya justificación queda fuera de la teoría. Por ejemplo, en la mecánica clásica se toma como punto de partida el hecho de que cada partícula tiene una posición en el espacio, bien definida en cada instante, y una velocidad que también está bien definida en cada instante, en el transcurso del tiempo. La mecánica clásica, como tal, no presenta el problema de saber cómo se determina (¡y qué quiere decir!) la "posición" de cada partícula, ni la significación dada al concepto de tiempo utilizado para describir las "posiciones sucesivas" de la partícula.

3] En la descripción de los fenómenos a los cuales se aplica la teoría, se utilizan además otros conceptos que no son aceptados como *dados*, puesto que es la teoría misma la que se va a encargar de introducirlos o de caracterizarlos con precisión. Estos conceptos corresponden a "funciones" (en el sentido matemático del término) cuyos valores no pueden ser obtenidos sino por aplicación de la teoría a los objetos que pertenecen a un cierto dominio, dentro del rango de fenómenos que se quieren explicar. Estos conceptos (o términos) son habitualmente llamados conceptos o términos "teóricos". Por oposición, los otros, los "observables", son llamados términos "no teóricos".[16]

Dos consecuencias resultan de todo lo que precede. En primer lugar, la clasificación de los términos de una teoría en "observables" y "no observables" —o, más precisamente, en "teóricos" y "no teóricos"— es específica para cada teoría y no tiene significación fuera del contexto de la teoría. Pero, por otra parte, los conceptos o términos que son términos "no teóricos" ("observables") para una teoría dada, son el producto de construcciones teóricas en teorías anteriores. Por ejemplo, los conceptos de espacio y de tiempo que forman parte de la definición de la posición y de la velocidad de una partícula en la mecánica clásica, son construcciones teóricas muy complejas. La teoría que da cuenta de ellos se apoya en otros "observables", con respecto a los cuales, y dentro de la teoría, la posición y la velocidad de una partícula en un instante dado cumplen el papel de "conceptos teóricos".

2. *Abstracción empírica y abstracción reflexiva*

A partir de los conceptos tradicionales aceptados para construir la mecánica clásica, es posible, según lo dicho precedentemente, retornar "hacia atrás" en la construcción de los conceptos. Llegamos así a

[16] La distinción entre estas dos formas de abstracción ha sido establecida por la psicología genética (véase el capítulo siguiente).

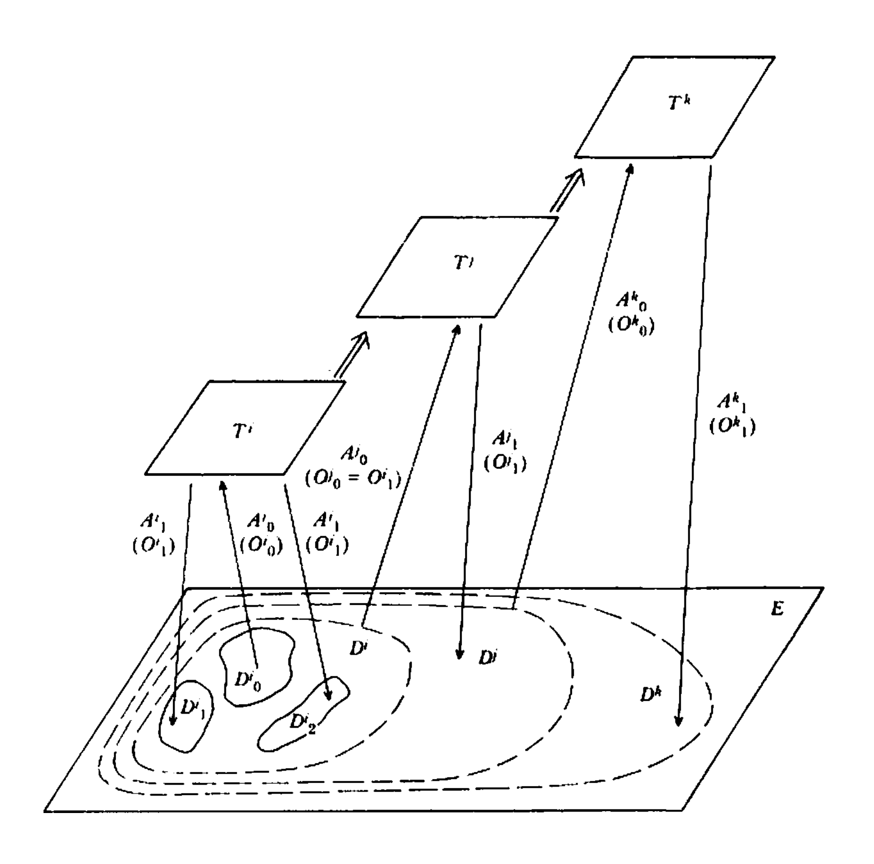
la génesis de los conceptos de base que forman parte de la construcción del mundo exterior, construcción realizada a partir de las acciones del sujeto. Pero podemos también ir en sentido inverso, hacia niveles más y más elevados, hasta las teorías más complejas de la física moderna. Podemos pues reconstruir los procesos sucesivos, partiendo de las "concepciones" del bebé que todavía no gatea, hasta los físicos que persiguen sin tregua nuevas partículas de extrañas propiedades para "explicar" ciertos fenómenos "incomprensibles".

El punto de vista que intentamos defender en este libro es que estos procesos tienen las mismas características de un extremo al otro de la escala. Para nosotros se trata, pues, de un mismo proceso dividido en etapas. En cada nivel, ciertas construcciones anteriores quedan como ya aceptadas, al mismo tiempo que tiene lugar la elaboración de nuevas construcciones. Esto es cierto tanto para el niño como para el físico cuántico. Pero lo más característico de este proceso es que en cada nivel se retorna al "plano de la experiencia" con nuevos esquemas interpretativos que enriquecen las ideas iniciales con las que se construyó dicho nivel. Este "enriquecimiento" no consiste solamente en el descubrimiento de nuevas propiedades de los objetos o de nuevas relaciones entre los objetos. Muy a menudo es el objeto mismo el que es modificado, y esta modificación tiene un sentido muy preciso: se trata de nuevas propiedades o relaciones que adquiere el objeto, tanto como del hecho aún más significativo de que ciertas propiedades atribuidas al objeto en un comienzo no pueden ya ser aceptadas sin llegar a contradicciones dentro del esquema interpretativo. Se trata de propiedades que estamos *obligados* a abandonar para salvaguardar las estructuras que hacen inteligible el resto de la experiencia.

El término "inteligible" es utilizado aquí para referirnos al hecho de que ciertos resultados de mediciones se convierten en consecuencia necesaria de resultados de otras mediciones, cuando se utilizan las relaciones que la propia teoría establece, siendo éste el caso para múltiples aplicaciones de la misma teoría a sistemas diferentes.

Estas características de las teorías físicas (es decir: *i*] su capacidad de vincular valores de funciones no teóricas que pertenecen a diferentes dominios de aplicación; *ii*] el retorno al plano de la experiencia y la modificación de los conceptos de base) muestran que no se trata de una sucesión de estructuras subsumidas unas dentro de otras. El proceso es mucho más complejo y esta complejidad se refleja en las dificultades inherentes a los intentos de formalización.

Deseamos destacar una vez más que, no obstante la complejidad del proceso, hay una gran regularidad y uniformidad en los mecanismos de construcción. Por muy elevados que sean los niveles de abstracción a los cuales arribemos, el pasaje de un nivel a otro se efectúa siempre de la misma manera a través de los dos tipos de abstracción.



D = Dominio

E = Plano de la experiencia, en el cual S (situación) y F (fenómeno) están dados. Este plano es la sede de los "observables".

T^i, T^j, T^k = Teorías mecánicas sucesivas.

A^i_0, A^j_0, A^k_0 = Abstracciones de tipo empírico con respecto a las teorías T^i, T^j, T^k.

A^i_1, A^j_1, A^k_1 = Abstracciones reflexivas con respecto a las teorías.

O^i_0 = "Observable" con respecto a T^i.

O^i_1 = Construcción teórica con respecto a T^i, pero "observable" con respecto a T^j.

Se parte de ciertos conceptos (que son el producto de abstracciones reflexivas de los niveles anteriores) y, a través de un proceso de abstracción empírica, se identifican ciertas funciones sobre las cuales se construyen nuevos conceptos directamente aplicables a un cierto dominio de la realidad. Luego, por un proceso de abstracción reflexiva —utilizando un marco matemático que no es sino la estructura de la teoría misma en proceso de construcción— se amplían estos conceptos a otros dominios de la realidad, dominios que se tornan, por este mismo hecho, inteligibles. Estos dos procesos de abstracción constituyen el método de construcción de todos los conceptos físicos y, al mismo tiempo, el hilo conductor que vincula entre sí los diferentes niveles de construcción de las teorías. Intentaremos en la sección siguiente expresar con mayor precisión lo que acabamos de decir.

3. *La sucesión de las teorías*

El punto de partida de una teoría física T^i es siempre un fenómeno acerca del cual se busca una explicación. La elección de este fenómeno (o conjunto de fenómenos) *recorta* una parte de la realidad. Es decir que en la descripción de este fenómeno se consideran ciertos individuos, ignorando otros, y se hace referencia a ciertas relaciones entre ellos, ignorando otras. Hay, pues, desde un comienzo, un proceso de abstracción que designaremos con la notación A^i. Es por este proceso de abstracción A^i que definimos una situación S (ciertos individuos, o elementos, y ciertas relaciones entre ellos), situación que pone en evidencia el fenómeno F que se intenta explicar.

La descripción de S y de F supone en general ciertos conceptos O^i que corresponden a "experiencias directas" de fenómenos del tipo F. Algunos de estos conceptos son definidos de manera vaga, aun cuando supongan niveles de abstracción muy complejos (por ejemplo, la idea de "masa" en Newton, concebida vagamente como "cantidad de materia"). Es posible luego analizar estos conceptos para caracterizar el proceso de abstracción que ha conducido a ellos. Sin embargo, tal análisis no es necesario desde el punto de vista de la teoría física, puesto que la teoría misma se va a encargar de definirlos o de caracterizarlos con precisión.

El mecanismo es el siguiente:

a] Hay ciertos conceptos de tipo O^i que, contrariamente a otros, constituyen los *datos* que la teoría acepta como suficientemente bien definidos (o bien caracterizados, o ya constituidos y aceptados como "datos"). Los conceptos de espacio y de tiempo, con sus escalas respectivas, así como el concepto de "posición" que definen, constituyen un ejemplo válido para la mecánica clásica. En otros términos, del conjunto de los O^i, la teoría en cuestión acepta un subconjunto O^i y reconstituye los otros O^i que llamaremos O^i_1. Esta división de los O^i

en O^i_0 y O^i_1 es siempre relativa a la teoría en cuestión. Por ejemplo, el espacio y el tiempo, con sus escalas respectivas, son O^i_0 cuando T^i es la mecánica clásica, pero son O^i_1 para la mecánica relativista. Llamaremos *observables*, con respecto a una teoría T^i, los O^i_1 aceptados por esta teoría. Estos observables son "extraídos" del plano de la experiencia por un proceso de abstracción empírica que designaremos A^i_0.

b] A partir del conjunto de los O^i relativos a un cierto tipo de fenómenos *F*, la teoría comienza pues por establecer una distinción entre los O^i_0 y los O^i_1. Este proceso consiste, en general, en una caracterización precisa de los O^i_1 en el interior de un *cierto dominio de aplicación* de la teoría D^i_1. El dominio de aplicación está definido por un subconjunto de objetos, eventos, etc. ya aceptados como tales en las situaciones *S* que constituyen el punto de partida. Este dominio está caracterizado por el hecho de que los O^i_1 están determinados de manera unívoca por los O^i_0 en el interior de este dominio. Llamaremos *proceso de abstracción* A_0 *relativo a una teoría* T^i al proceso de construcción de los O^i_1 a partir de los O^i_0 en el interior de un dominio preciso.

c] Una teoría que se detenga aquí reviste poco interés. Las teorías —en la medida en que las aceptamos como "explicativas"— se tornan interesantes cuando logran aplicar a *otros* dominios por lo menos uno de los O^i_1 caracterizados de una manera completa en el interior del dominio D^i_1. En los nuevos dominios (D_2, D_3, etc.) los mismos O^i_0 siguen siendo válidos, pero el tipo de abstracción A^i_0 no es ya aplicable (si fuera así se trataría del mismo dominio D^i_1, y no de otro dominio) para llegar a los O^i_1. Es necesaria una *construcción teórica*. El proceso que conduce a la construcción de un O^i_1 en dominios D_2, D_3 . . . D_n es un *proceso de abstracción reflexiva* que será designado A^i_1 (en la medida en que el nuevo O^i_1 es *reducible* al anterior cuando la construcción teórica es aplicada al D^i_1, puesto que solamente en dicho caso podemos continuar hablando del O^i_1).

d] El pasaje de una teoría T^i a otra teoría T^j es tal que: *i*] los O^i_1 de T^i (o por lo menos algunos de ellos) son considerados como O^j_0 con respecto a T^j; *ii*] T^j es aplicable a todos los D^i, incluyendo también otros dominios (es decir: $D^i \subset D^j$). Resulta de aquí que el proceso de abstracción que conduce a los O^i_1 (abstracción de nivel A_1 con respecto a T^i) es considerado ahora como un A_0 con respecto a la nueva teoría.

e] Las A_0 de una teoría *son abstracciones de tipo empírico* con respecto a los O^i_0 que han servido para caracterizar los F_0 de esta teoría. Las A_1 son *abstracciones reflexivas*. El producto (resultado) de una abstracción reflexiva con respecto a una teoría se torna la *base observable* (el punto de partida observable) de una abstracción empírica con respecto a la teoría de orden superior.

CAPÍTULO VIII

LA PSICOGÉNESIS DE LOS CONOCIMIENTOS FÍSICOS

I. INTRODUCCIÓN

Al considerar la física nos encontramos directamente en contacto con problemas de construcción y de validación de los conocimientos mucho más complejos que en el caso de las disciplinas cuya fuente es endógena. De las condiciones necesarias de verdad de una teoría física la principal es sin duda su adecuación a "hechos" exteriores al sujeto, y nada nos garantizaba que se pudieran encontrar algunas regularidades o aspectos generales en la construcción de tales teorías, a partir de Galileo y de Newton, vista la inmensa diversidad de hechos a interpretar y, correlativamente, la gran variedad de tipos de teorías elaboradas después que la física se tornó científica. Es cierto que a partir de esta época los únicos hechos considerados como tales son aquellos que se consideraban medibles en grados diversos, y que un segundo carácter necesario de las teorías físicas es el de comportar una forma matemática coherente. Pero precisamente sobre este segundo punto hay una diferencia bastante considerable que separa la filiación de las estructuras lógico-matemáticas de la sucesión de teorías físicas: en tanto que las primeras son engendradas unas por otras sin que las nuevas tengan que contradecir o poner en tela de juicio nada de lo que fue demostrado por las precedentes, tal integración no se encuentra, de una manera general, en la historia de las interpretaciones físicas. Por el contrario, ella evidencia ciertas vecciones más o menos continuas pero también traducciones, correcciones y múltiples tanteos. En cuanto a los "hechos", no se llega a ellos sino por aproximaciones sucesivas y aun a veces con la obligación de abandonar alguna prioridad que parecía constitutiva, pero cuyo mantenimiento hubiera contradicho los nuevos hechos que se intentaba interpretar. Podríamos por consiguiente preguntarnos si nuestra investigación de mecanismos comunes de formación o transición guarda alguna significación aceptable en el plano de la física científica misma, y si no será un tanto gratuita en lo que respecta a las relaciones con la psicogénesis. Es cierto que las convergencias notables descritas en el capítulo I entre la historia del impetus y la idea de impulso en la psicogénesis podría parecer prometedora, pero no se trataba más que de nociones precientíficas, anteriores a la experimentación, a la medida, y a la puesta en ecuaciones. De allí la incertidumbre que podría subsistir en cuanto a mecanismos comunes en-

tre la formación de las nociones, las interpretaciones físicas infantiles y los procesos teóricos de niveles superiores.

Pues bien, el análisis histórico-crítico del capítulo precedente provee una respuesta bastante esclarecedora a la cuestión de los mecanismos de formación y transición en el plano de las teorías, por su combinación de analogías y de diferencias con lo que hemos visto respecto de las filiaciones de las estructuras lógico-matemáticas. El primer rasgo común, que es en realidad fundamental, es que al considerar las grandes etapas de la mecánica, reencontramos las sucesión *intra-*, *inter-* y *trans-*: primero el pasaje de una situación *intra-*, donde los datos son subsumidos bajo leyes generales pero no son engendrados por sus diferenciaciones, a una situación *inter-*, donde los invariantes son deducidos de transformaciones; luego, la prosecución de este movimiento por la subordinación del sistema físico a un álgebra general en la cual las nuevas variables corresponden a sus operadores (situación *trans-*). Además, en ciertos casos, como cuando se trata de traducir en términos de quanta las funciones de Hamilton, encontramos parcialmente una segunda analogía con la filiación de las estructuras matemáticas: es la obligación de pasar nuevamente por las etapas de la mecánica clásica para dotarlas de su nuevo contenido cuántico y, por consiguiente, la necesidad de apoyarse en la filiación histórica de los conceptos de base con sus imbricaciones sucesivas, a pesar de lo que parecería ser el prototipo mismo de una "ruptura" bachelardiana.

Pero si las analogías con los mecanismos de transición en juego en la elaboración de las estructuras matemáticas son comprensibles (por el hecho de que las teorías mecánicas son aquellas que elevan las interpretaciones físicas a su más alto grado de matematización debido a las operaciones del sujeto) las diferencias se imponen en las cuestiones de puesta en relación entre las teorías y los hechos. En efecto, las teorías no son válidas sino a condición de ser adecuadas a la experiencia; pero ésta, a su vez, es susceptible de ser enriquecida y de modificarse sin cesar, sin que se pueda aparentemente prescribir ley alguna *a priori* de la sucesión de los descubrimientos. Resulta entonces una diferencia que podría parecer profunda con las filiaciones propias de las estructuras matemáticas. Si bien la evolución de la mecánica ha pasado, en las grandes líneas, de una etapa que pudiéramos llamar "intra-factual" con Newton, a la etapa "inter-factual" de Lagrange y de Hamilton, y de allí a la etapa "trans-factual" de las álgebras microfísicas, es más difícil subdividir las grandes etapas en subetapas regulares en las cuales el *intra-*, el *inter-*, y el *trans-* se sucedieran por una especie de necesidad intrínseca que nosotros traduciríamos en términos de equilibración. Dicho de otra manera, los desequilibrios y las reequilibraciones se suceden de manera más irregular y esto tanto más cuanto que los descubrimientos experimentales están menos co-

ordinados entre sí. Es entonces mucho más notable poder poner en evidencia, a pesar de estos factores contingentes, un proceso funcional general que se advierte en la transición de una teoría física a la siguiente, y que deriva de este resultado fundamental de los análisis psicogenéticos tanto como históricos: a pesar de sus vínculos evidentes con fuentes exógenas (inmediatas o mediatas), los "hechos" no podrían ser independientes de las estructuraciones endógenas por medio de las cuales el sujeto las interpreta en una mezcla continua de verificaciones y de inferencias (las primeras precediendo a las segundas, o viceversa).

Es entonces a este nivel de los intercambios o interacciones entre el sujeto y los objetos que se rencuentra el proceso habitual, pero esta vez bajo una forma tanto más general cuanto que es más elemental: la sucesión *intra*-factual, *inter*-factual y *trans*-factual. El *intra*-factual es la fase de una teoría *Tn* en la que ésta se apoya sobre un cierto número de "hechos" obtenidos por simples abstracciones empíricas, pero sobrentendiendo (como lo hemos precisado en nuestra introducción general) que los "hechos" suponen ya cuadros asimiladores debidos a las acciones anteriores del sujeto (implicando así una forma elemental de abstracción reflexiva implícita, pero solamente instrumental y no tematizada aún). En este caso la teoría *Tn* reúne en una ley general un cierto número de hechos, pero sin engendrar sus diferenciaciones (por ejemplo, en la mecánica clásica newtoniana como en la teoría *intra*-figural de Euclides, cada problema exige su propio método de resolución). La fase propia de la teoría siguiente $T(n + 1)$, está entonces caracterizada por una construcción a base de abstracciones y de generalizaciones completivas. Las abstracciones reflexivas son efectuadas en el seno del sistema $T(n + 1)$ en vías de formación, tanto como extraídas de *Tn*, mientras que las generalizaciones completivas provienen de exigencias endógenas tanto como de puestas en relación de nuevos hechos. Esta fase *inter*-factual representa así el aporte del sujeto y de sus propias operaciones en el rebasamiento superador de la teoría *Tn* y en la elaboración de una nueva estructuración. De aquí entonces la fase *trans*-factual que corresponde a la teoría $T(n + 2)$. Ella verifica por medio de nuevas experiencias la construcción teórica precedente y comprueba entonces, bajo forma de observables que se han tornado controlables por nuevas abstracciones empíricas, lo que permanecía en estado de productos inferenciales con relación a la teoría *Tn*. El término de *trans*- se justifica por la razón siguiente: los nuevos hechos observables en $T(n + 2)$ se agregan después de su construcción a aquellos de *Tn* y constituyen con ellos un sistema más amplio, en el cual las diferenciaciones propias de los subsistemas pueden ser engendradas por la estructura de conjunto de $T(n + 2)$ en la medida en que los procesos de la fase *inter*- son constructivos. El mismo me-

canismo de inter-acción formadora entre el sujeto y los objetos se repite luego al pasar de $T(n + 2)$ a $T(n + 3)$, etc., pero con un progreso que en el curso de tales triadas sucesivas (*intra-*, *inter-* y *trans-*) acrecienta simultáneamente tanto la necesidad interna de los modelos como la adecuación a la experiencia.

Va de suyo que, si tal es el proceso de transición de una teoría a la siguiente, su generalidad conduce a admitir que sus comienzos deben remontarse hasta los estadios iniciales de la psicogenésis. Es esto lo que vamos a intentar mostrar a propósito de la noción de peso, pero sólo después de haber analizado algunos ejemplos que muestran la precocidad del papel de las abstracciones reflexivas y de las generalizaciones constructivas no puramente extensionales.

II. ABSTRACCIONES Y GENERALIZACIONES NECESARIAS PARA LA CONSTITUCIÓN DE LOS HECHOS FÍSICOS ELEMENTALES

A. La evolución de la abstracción empírica (a partir de los objetos) y la de la abstracción reflexiva[1] (a partir de las acciones y operaciones del sujeto) están lejos de ser paralelas o simétricas: mientras que la segunda de estas dos formas tiende a liberarse de toda comprobación de hechos y a orientarse en la dirección de verdades lógicas y matemáticas "puras", la primera crece en precisión y en eficacia sólo en la medida en que recibe de la segunda instrumentos de registro o de elaboración. Esto ocurre desde las lecturas más elementales de la experiencia, de tal manera que esta subordinación se acentúa progresivamente con el desarrollo. Resulta pues interesante, para la epistemología de la física, intentar desentrañar estas relaciones desde el comienzo mismo, es decir, desde la constitución de los "hechos" (u observables interpretados, tal como indicamos en la Introducción) y aun de los observables mismos en la medida en que estos últimos (aun cuando parezcan reducirse, como pudiera creerlo el sujeto, a simples verificaciones que no poseen todavía significaciones) implican ya el empleo de cuadros asimiladores indispensables para toda "lectura" puesto que esta última es siempre parcialmente interpretativa.

Vamos ahora a intentar mostrar que desde los estadios más elementales de la representación encontramos seis de los principales caracteres que los análisis históricos han señalado en el seno de las teorías físicas de nivel elevado y que aparecen así como pertenecientes a mecanismos muy generales de abstracción y de generalización, y no simplemente a la complejidad creciente de los problemas o de los niveles de conocimientos. En efecto, vamos a comprobar que en el cur-

[1] J. Piaget y colab., *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, París, PUF, 1977, 2 vols. EEG 34 y 35.

so de la psicogenésis: *1*] una misma noción (por ejemplo la presión debida al peso de un objeto colocado sobre otro) puede corresponder tanto a un observable (por ejemplo un hundimiento del segundo objeto), como a una coordinación inferencial sin verificación posible para el sujeto (de donde resulta su equivalencia funcional, pero no estructural, con un "término teórico" en un sistema físico); *2*] resulta así una *alternancia*, luego de la constitución de un sector de conocimientos, entre las abstracciones empíricas propias de la lectura de los observables o de los hechos experimentales, y las abstracciones reflexivas conceptualizadas que son necesarias para la construcción de los hechos "inferidos" o conceptos inherentes a las coordinaciones deductivas; *3*] una misma relación general tal como la de la velocidad ($v = e/t$) puede dar lugar a dominios o subdominios de aplicaciones independientes y no directamente reducibles entre sí, aunque con imbricaciones o intersecciones posibles y estando sometidos de manera global a una relación general que no las engendra como diferenciaciones; *4*] resulta así una alternancia de abstracciones y de generalizaciones, pero *5*] éstas se presentan, en el plano de los conocimientos físicos, así como en el de los conocimientos lógico-matemáticos, bajo formas constructivas y completivas tanto como inductivas; finalmente, *6*] se presentan a menudo con una reinterpretación de las variables en el seno de principios ampliados de conservación.

B. *La presión.* Conviene a este respecto analizar algunos hechos, entre los cuales uno de los más instructivos se refiere a las nociones infantiles sobre la presión y la resistencia (o, más adelante, sobre la reacción), dos nociones a propósito de las cuales el plapel que desempeñan las coordinacciones inferenciales es considerable.[2] Durante una primera etapa, la propiedad o actividad de "presionar" está exclusivamente reservada a los casos en los cuales interviene algún observable perceptivo, que en este caso particular es un hundimiento (por ejemplo un cilindro metálico puesto sobre una espuma de goma). En estas situaciones, los sujetos invocan alternativamente dos factores: el peso del agente y la blandura (o no dureza) del elemento que reacciona (que llamaremos "reactante"). Dichos factores son considerados de hecho como dos condiciones simultáneamente necesarias y suficientes, pero sin formularlas explícitamente, salvo en el caso negativo privilegiado de hierro sobre hierro o de goma sobre goma, donde según los sujetos no interviene ninguna presión ni resistencia puesto que "los dos son iguales". En cuanto al hierro sobre madera no hay tampoco para el sujeto ni presión ni resistencia alguna puesto que nada pasa desde el punto de vista de un hundimiento perceptivo. (Señalemos que todas

[2] Para una descripción detallada de las experiencias, véase J. Piaget y colab., *Travaux sur la causalité*, 3 vols., en prensa.

estas situaciones fueron comprobadas después de la anticipación y en ningún caso permanecieron en el nivel puramente verbal.)

Esta primera etapa, ligada a un único observable positivo o negativo (pero que es ya un "hecho" en tanto está interpretado) plantea por sí misma dos problemas: el de las condiciones de lectura de este observable, del cual el sujeto toma conciencia, y el de las relaciones igualmente en juego, pero sin consideración actual, hasta que una abstracción reflexiva las ponga en evidencia en el curso de la segunda etapa.[3] Entre las condiciones de lectura del observable, es necesario mencionar la puesta en relación o las correspondencias, así como las clasificaciones de los casos de hundimiento o de no hundimiento: se trata aquí tanto de coordinaciones lógicas o prelógicas, ya en acción desde los primeros esquemas sensoriomotrices, y fuera de los cuales incluso los observables más simples no podrían ser aprehendidos. Pero si estos instrumentos de conexión —cuya formación es anterior a los comportamientos actuales— son incorporados de esta manera a las relaciones en juego, también se da el caso de que intervengan además otras relaciones cuyo papel, aunque sea implícito, es ya muy importante. Por ejemplo, previendo que el peso se hundirá en la espuma de goma, el sujeto estará seguro que *a fortiori*, un peso superior también lo hará, pero sin que tome conciencia de esta graduación y sin que sea capaz de conceptualizarla verbalmente en todos los casos. Por el contrario, en una segunda etapa (5 y medio a 7 años) el sujeto logra ciertas cuantificaciones: por ejemplo, dirá espontáneamente que "el hierro se apoya muy fuerte" sobre la espuma de goma y "menos fuerte" sobre una madera delgada (Lau a los 5 ; 6).

Este comienzo de cuantificación, originado en una abstracción reflexiva a partir de relaciones implícitas en las coordinaciones que han tenido éxito en la primera etapa, es también la fuente de una generalización importante: si un mismo peso se apoya diferentemente sobre dos reactantes de resistencias diferentes, es posible en este caso seriar estos efectos, y la presión más débil podrá ser considerada como positiva, pero no nula. Un lindo ejemplo es el de un niño (Eri 7 ; 2) que extrae esta conclusión, pero como vincula todavía las presiones con los hundimientos, cree verlos por todas partes y construye así falsos observables (y él no es el único en hacer esto): "todo este material, yo lo veo descender un poquito".

La etapa siguiente en el camino de estas generalizaciones a base de abstracciones reflexivas conduce entonces a una inferencia. Si los agentes pesan de manera diferenciada sobre reactantes cuyas propiedades de blandura o de dureza son variables de un objeto a otro, pero constantes para cada objeto, por razones de simetría se debe suponer asimismo que cada agente (hierro, madera, etc.) posee su propio peso y

[3] J. Piaget y R. García, *Les explications causales*, París, PUF, 1971, EEG 26.

ejerce por consiguiente una presión uniforme: las variaciones de los observables se referirán así a las múltiples combinaciones posibles entre agentes de pesos diferentes y reactantes de durezas distintas.

Comienza entonces la noción de una presión generalizable, independiente de los hundimientos y que actúa incluso sin verificaciones posibles:[4] cesa de ser un observable en el caso en que el reactante es demasiado duro. La presión es así promovida al rango de concepto inferido, cuya generalidad resulta necesaria (entre 7 y 9-10 años, con coordinaciones inmediatas a los 11-12 años).*

A esta evolución de la presión corresponde, por otra parte, la de la resistencia, en la dirección de la "reacción", en simetría pero con retardo con respecto a las "acciones" que acabamos de describir. La resistencia es concebida al principio sólo como un bloqueo no vectorial debido a la "dureza"; no constituye, por consiguiente, una actividad. Varía de una sustancia a otra, pero permanece constante para cada objeto. A partir de los 7-8 años, la resistencia aumenta o disminuye según los agentes y se convierte así en una semiactividad. Hay allí un comienzo de abstracción reflexiva a partir de las variaciones de la presión admitidas precedentemente (5 y medio a 7 años). Pero lo que es importante observar es que esta relación es concebida al comienzo como inversa: a una débil presión corresponde una fuerte retención y a una fuerte presión una débil resistencia. Una niña (Dra 7;11) piensa que la espuma de goma "retiene menos si el peso es más pesado porque ella se hunde más". Ésta es una opinión generalizada hasta los 9 o 10 años. En otros términos, las evaluaciones de la dureza y de la blandura sólo exigen abstracciones empíricas, mientras que la generalización que conduce de las variaciones de la presión a la actividad de retener supone abstracción y cuantificaciones que rebasan las verificaciones. Sin embargo, el sujeto permanece ligado a los hundimientos, en calidad de únicos observables que permiten vincular las presiones a las resistencias. La abstracción reflexiva no se torna efectiva sino cuando el niño, en lugar de centrarse exclusivamente en los resultados comprobables de ciertas variaciones de las presiones y de las resistencias, las compara en tanto actividades opuestas y puede por consiguiente entrever su simetría. Así, el sujeto Fre (10;5) expresa con respecto al peso: "él se apoya más, por eso la goma debe resistir más".

[4] El peso es ciertamente observable y aun su conservación puede ser comprobada empíricamente, pero la presión que ejerce no podría ser comprobada si no hay hundimiento de la superficie sobre la cual se apoya. El hecho de sentir una presión sobre la palma de la mano no implica en modo alguno, para el niño, que dicho peso producirá la misma presión sobre un objeto duro.

* Es cierto que el peso es observable y aun su conservación puede ser comprobada empíricamente. Sin embargo, la presión que ejerce no es observable sino en caso de hundimiento, y el hecho de sentir una presión sobre la palma de la mano no implica en nada, para los niños pequeños, que tal presión se produzca también sobre los objetos duros.

Para llegar a la idea de "reacción" faltan aún tres progresos necesarios. El primero consiste en sustituir a esta semiactividad de "resistir", que no es aún vectorial, una actividad realmente dirigida que los sujetos expresan con el término "retener" el cual se va convirtiendo poco a poco en "empujar hacia arriba" en respuesta a la presión orientada hacia abajo. El segundo progreso necesario —más difícil de alcanzar— es una generalización de este empuje hacia arriba en los casos donde la presión del agente no es observable y donde, por consiguiente, la respuesta del reactante lo es todavía menos. En tercer lugar, hay un desarrollo que sólo se logra hacia los 11 o 12 años, y que consiste en llegar a una igualdad necesaria de la acción y de la reacción, puesto que si no fuera así, una vencería visiblemente a la otra. A este respecto, la conclusión a la que llegan algunos niños es clara: un sujeto (Toi 11;2), por ejemplo, llega a decir que si su silla no lo repeliera, él se hundiría hasta la tierra, y que si su presión sobre la silla no fuera igual a la reacción de la silla, ella lo enviaría hasta el techo. Se ve así el papel indispensable de la abstracción reflexiva y de la generalización constructiva puesto que estos tres progresos tienen que ver con inferencias que rebasan ampliamente las comprobaciones empíricas. Esto no impide que el sujeto pueda retornar a verificaciones sobre los observables, tal como lo hemos comprobado en otras situaciones.

Estos hechos relativos a la presión constituyen un hermoso ejemplo de la importancia de la fase *inter-* descrita anteriormente en cuanto a los pasajes de un modo de interpretación al siguiente; por otra parte, nos permiten comprender mejor la complejidad de la naturaleza de dichos pasajes. En efecto, resulta claro que después de la fase *intra-*, en la que sólo se reconocen como presiones aquellas cuyos efectos son observables en tanto hundimientos, el sujeto generaliza el fenómeno a los casos donde ningún índice perceptible le permite controlarlo. Pero no se trata allí de la simple generalización extensional, puesto que ésta tiene por motor abstracciones reflexivas que surgen de dos de los esquemas fundamentales de las estructuras operatorias del sujeto: la cuantificación (en más o en menos) y la reciprocidad. La primera induce a pensar que si hay grados diversos de hundimiento puede muy bien haber presiones no nulas aunque sean invisibles, lo cual conduce inmediatamente a ligar este poder de presión a los pesos constantes de los objetos. En cuanto a la reciprocidad, lleva al sujeto a sustituir a la resistencia-dureza de los objetos aparentemente pasivos, una resistencia-actividad, y conduce paso a paso hasta la igualdad de las acciones y reacciones. Sorprendentemente, todo este trabajo de la fase *inter-* resulta ser puramente inferencial. Se muestra aquí con toda evidencia el papel de la abstracción reflexiva que culmina en la fase *trans-* cuando el sujeto llega —en el marco de esta experiencia— a un nivel donde la necesidad intrínseca de su modelo

se impone sobre los nuevos observables construidos deductivamente en el curso de la fase *inter*-.

C. *Las velocidades*.[5] Hay dominios múltiples en los cuales una misma ley puede tomar formas diferentes, lo que crea dificultades en las síntesis. El ejemplo más notable lo constituye la noción de velocidad.

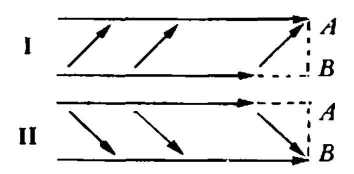
La definición de velocidad o su relación constitutiva es

$$v = e:t, \text{ o } v = n:t$$

donde t es el tiempo, e es el espacio recorrido y n corresponde a frecuencias homogéneas de aparición. En la constitución de estas fórmulas, la velocidad implica el tiempo en tanto orden temporal de sucesión, así como la duración en tanto intervalos iguales. La generalización de esta condición común es tardía y las intuiciones iniciales de la velocidad parecen recurrir solamente al orden temporal y no a la duración.

1. La noción primitiva de velocidad está fundada en el proceso de rebasamiento: si de dos móviles (y es necesario que sean por lo menos dos) uno está detrás del otro en un momento anterior y se encuentra luego delante del mismo en un momento posterior, entonces se dice que su velocidad es mayor. En tal caso, la evaluación de la velocidad no requiere más que el orden espacial y el orden temporal, aun cuando esté claro que ya intervienen —aunque implícitamente— intervalos espaciales (espacios recorridos por el móvil que rebasa y el móvil que es rebasado) y temporales (duraciones sincrónicas de los movimientos comparados), sin que el sujeto tome conciencia. El problema consiste en comprender por qué tipos de abstracciones el sujeto llegará a construir estas nociones de intervalos y, en particular, a aprehender el papel de la duración en tales relaciones.

Para analizar esta situación, partiremos o bien de las correspondencias que utiliza de hecho el sujeto cuando evalúa correctamente las velocidades, o bien de las duraciones en función de los puntos de llegada. Para simplificar tomaremos los mismos puntos de partida.



[5] J. Piaget, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, París, PUF, 1946.

En el caso I del diagrama precedente, se representan con flechas horizontales los trayectos espaciales. El móvil *A* es más rápido que *B* puesto que lo rebasa y recorre así un espacio mayor. Las flechas oblicuas (╱) expresan en este caso las simultaneidades, es decir que en un mismo instante *A* está más adelante que *B*. Se agrega el referencial interno del sistema, representado por líneas de puntos verticales, que indican las mismas posiciones sobre los dos caminos paralelos. En el caso II, el diagrama describe otra situación en la cual las duraciones son evaluadas por medio del orden de los momentos de llegada: las flechas horizontales expresan pues duraciones, y el móvil *A* es el más rápido puesto que llega antes que el otro. En este caso, las flechas oblicuas (╲) ligan las mismas posiciones logradas por *A* antes que *B* y las líneas punteadas verticales indican el referencial temporal interno, es decir, las simultaneidades.

Antes de retomar nuestro problema, observemos la simetría completa de estos sistemas de correspondencias, lo que muestra una vez más que si la velocidad implica el tiempo, este último es, recíprocamente, inseparable de su contenido, es decir de la velocidad de los eventos: $t = e:v$. Así, si los sujetos pequeños ven un móvil llegar antes que el otro a la misma posición (como en nuestro esquema II) concluyen fácilmente que este móvil ha ido más rápido y ha puesto menos tiempo (la relación "menos tiempo" se expresa también a veces con las palabras "llegó más rápido"). Sin embargo, en situaciones donde los observables demandan un mayor grado de interpretación, los sujetos admitirán frecuentemente las siguientes relaciones:

"más rápido = más lejos (rebasamiento) = mayor tiempo"

Esto se debe a que a velocidades iguales se tiene en efecto la relación "más lejos = mayor tiempo". Pero se trata aquí de deducciones erróneas, mientras que si se atuvieran a observables simples (como en nuestros esquemas I y II), las relaciones o correspondencias en juego son efectivamente las que acabamos de describir.

Resulta entonces fácil de comprender cómo el sujeto, partiendo de evaluaciones ordinales fundadas solamente en rebasamientos, llega a la relación $v = e:t$ considerando los espacios recorridos *e* y las duraciones *t*; dicho de otra manera, los intervalos espaciales y temporales, y no ya solamente las correspondencias finales. Pero entonces debemos observar que si bien los puntos de llegada pueden ser registrados por simple abstracción empírica, la consideración de los intervalos va en la dirección de la abstracción reflexiva, puesto que es necesario un proceso retrospectivo y en cierto sentido retroactivo para remontar de estas fronteras terminales a los estados anteriores y a los puntos de partida. Aun en el caso en que estos últimos difieran espacial o temporalmente, para los dos móviles que se están comparando, los sujetos pequeños tienden a despreciarlos, como se ha visto a propósito de la noción de "conmutabilidad".

Para conceptualizar los intervalos, es preciso construir nuevas relaciones que vinculen entre sí las posiciones o los momentos iniciales y finales de los movimientos en tanto procesos continuos, y que consideren además todos sus estados sucesivos. Aunque todos estos aspectos intervengan naturalmente ya en las acciones del sujeto, no constituyen todavía objetos de pensamiento, sino que permanecen en estado implícito e indiferenciado; es la abstracción reflexiva la que los traduce en relaciones explícitas, *e* y *t*. Es entonces su composición la que conduce a la relación $v = e:t$, y esta composición se apoya en las correspondencias expresadas por nuestros esquemas I y II pudiendo así dar lugar a nuevas verificaciones empíricas en las cuales son simplemente englobadas aquellas que corresponden a los puntos de llegada. Por supuesto, aún es necesaria una generalización para pasar de las comparaciones entre movimientos total o parcialmente sincrónicos —donde estas verificaciones son suficientes— a las relaciones de velocidad entre movimientos sucesivos que exigen un cálculo y una cuantificación métrica, pero sólo nos estamos refiriendo aquí a los niveles más elementales.

2. Veamos ahora las relaciones entre las velocidades lineales y las angulares. Podríamos preguntarnos cuál es la relación entre el trayecto recorrido por una rueda y su velocidad de rotación, o dicho de otra manera, el número de giros que efectúa la rueda, lo que conduce a la velocidad-frecuencia. Sobre el primer punto, no es sino a partir de los 7-8 años que el niño comienza a comprender que una vuelta de rueda corresponde sobre la ruta a una longitud constante independientemente de su velocidad angular. Antes de estas edades, los niños piensan que si una rueda que recorre diez centímetros da diez vueltas girando rápidamente, no dará sino unas cinco vueltas si su rotación es lenta. Por otra parte, si una de ellas da diez vueltas seguidas, va "mas rápido" que otra rueda similar que no da más que una vuelta, aun si la primera da vueltas más lentamente. En este caso la velocidad sólo es función del espacio recorrido, independientemente de las duraciones o de las velocidades angulares. Por el contrario, entre 7 y 9 años el sujeto descubre que una vuelta de rueda se traduce por un trayecto lineal constante, que "la velocidad no tiene importancia" a este respecto (sujeto Ari 9;2), y comprobará la relación inversa de las velocidades y las duraciones. Pero no es sino en el nivel de los 11-12 años que las diversas relaciones son a la vez deducidas y tematizadas: la velocidad lineal se traduce por "la distancia recorrida durante un cierto tiempo" (Syl 11;2) y la velocidad angular "es el tiempo que toma la rueda para dar una vuelta". En una palabra, "está siempre el tiempo", como expresó Ant (12;0). Parece claro entonces que estas generalizaciones finales no resultan de una simple adición de abstracciones empíricas y que la composición misma de las relaciones en

juego exige una parte activa de abstracciones reflexivas.

3. Esto es todavía más cierto con respecto a la velocidad-frecuencia en su estado aislado. La experiencia a la que nos referimos es la siguiente: por la ranura vertical de una pantalla que oculta un disco en rotación, el sujeto ve pasar una línea roja según diversas frecuencias de aparición.

En el nivel inicial (I*A*, a los 4-5 años) el sujeto no considera la velocidad sino en función de su actividad perceptiva: considerará que la rueda va lentamente cuando se ven pasar bien las rayas rojas, o que va muy rápido cuando no se ven bien las líneas rojas. En el último caso se trata claramente de que el móvil rebasa el movimiento de la vista. En el nivel I*B* (6 años) todavía es cuestión de "ver mejor", con una cierta referencia temporal en algunos casos (ver "por más tiempo"), pero siempre en relación con la acción propia. Hay, asimismo, un comienzo de frecuencia, pero bajo una forma espacial: "se ven (las líneas rojas) casi por todas partes" (respuesta de Jac 6;10).

En el nivel II*A* (7-9 años: formación de las operaciones concretas) los juicios globales apelan explícitamente a la frecuencia: la velocidad es más grande cuando hay "muchas" líneas rojas. Pero la duración permanece implícita (más o menos "a menudo") y cuando se intenta precisarla, el sujeto se refiere sólo a una aparición: el trazo rojo "se hace más rápido" o "menos rápido" de lo esperado. Todavía en el nivel II*B* (9-10 años), cuando se sugiere al sujeto que cuente los pasajes del trazo rojo o que mida los tiempos (con un reloj con cronómetro), hace esta medida pero sin ocuparse ya de las frecuencias, y concluye a menudo que "más rápido = mayor tiempo", o bien, alternativamente, cuenta las frecuencias pero sin ocuparse del tiempo. Por el contrario, el sujeto llega a menudo a un procedimiento exacto que consiste en medir el tiempo de retorno del trazo rojo: en ese caso dos segundos indican según el sujeto Met (10;4), que "esto marcha más rápido" que cuando contó 6 segundos. Pero como se ve, la frecuencia pasa entonces a segundo plano, a beneficio como precedentemente, de las apariciones aisladas en oposición a su suma.

En el nivel III (11-12 años) la frecuencia y la duración son finalmente coordinadas en forma explícita: "se hace dar vueltas por 15 segundos —dice el sujeto de Man (12;4)— y uno cuenta los trazos"; la velocidad es entonces "el número de vueltas en un cierto tiempo". La generalización final es, por consiguiente, el producto de abstracciones reflexivas referidas a los instrumentos operatorios que hicieron posibles las abstracciones empíricas anteriores en la medida en que éstas fueron correctas.

4. Llegamos así a un último caso donde intervienen dos tipos de velocidades independientes: el caso del engranaje entre dos ruedas dentadas

desiguales, de las cuales la más pequeña da dos vueltas y media durante la rotación de la grande mientras que los trayectos perimétricos son, naturalmente, de la misma velocidad. El niño puede utilizar diversos sistemas de referencia que faciliten las comprobaciones.

Los sujetos preoperatorios (estadio I de 5 a 7 años) no ven el problema, puesto que no se ocupan ni del número de vueltas ni del número de dientes: se contentan con evaluaciones perceptivas que permanecen subjetivas. Durante todo el estadio II (7-11 años), por el contrario, distinguen bien ambas velocidades pero oscilan entre las dos o llegan a compromisos contradictorios: "la rueda pequeña gana más tiempo", pero las velocidades son iguales "porque dan vueltas juntas". "La más grande da menos vueltas, va más lentamente, pero las dos van a la misma velocidad", responde Mag (9;4). "La grande va más lentamente, pero a la misma velocidad que la más pequeña. La pequeña va más rápido, pero tiene la misma velocidad; es una cuestión de tamaño de la rueda, porque es más pequeña y tiene menos dientes" (respuesta de Mia [11;7]).

Finalmente, en el estadio III las velocidades son diferenciadas y coordinadas: "la rueda pequeña da vuelta a mayor velocidad sobre su eje, pero a la misma velocidad de los dientes". ¿Entonces tendrá dos velocidades distintas? "Sí, más velocidad sobre su eje, pero no puede sin embargo saltar los dientes" (respuesta de Gad [12;5]).

Resulta claro, por consiguiente, que en estas cuestiones de engranaje, los dos problemas que debe resolver el sujeto son: *1*] diferenciar los dos tipos de velocidades en juego, una de ellas de naturaleza angular, referida al número de vueltas de las ruedas, mientras que la otra se refiere al número de dientes en un sector común de los perímetros; y *2*] integrar estas velocidades en una forma general, estableciendo a partir de ellas una relación entre ciertos desplazamientos y el tiempo necesario para ellos.

Si bien las respuestas del nivel II muestran la parte que desempeña la abstracción empírica en la diferenciación naciente, hacen ver igualmente en qué sentido estos procesos permanecen insuficientes, puesto que sin una reflexión coordinadora las distinciones llegan a ser contradictorias. Los problemas de diferenciación y de integración deben pues, en este caso particular, ser resueltos simultáneamente, y esto sólo se logrará por la unión de una generalización sintetizante y de abstracciones reflexivas sobre la composición de las relaciones utilizadas preferentemente.

5. En conclusión, la idea general de velocidad a la cual llegan los sujetos del estadio III (11-12 años) es función de la puesta en relación de un conjunto variado y heterogéneo de cambios con su denominador común. Estos cambios se presentan bajo las formas *a*] de desplazamientos lineales, *b*] de desplazamientos angulares, *c*] de sucesiones

en el orden lineal (número de vueltas de las ruedas que avanzan sobre la mesa), *d*] de sucesiones que tienen lugar en un mismo lugar (frecuencia del pasaje de trazos rojos señalados en el punto *3*] y *e*] de los engranajes dentados. Descubrir que en cada una de estas velocidades interviene la duración[6] y que por consiguiente "está siempre el tiempo" —como decía un sujeto— parece obvio, y en cierto sentido puede parecer sorprendente que su solución haya exigido tantos tanteos. La cuestión que se presenta entonces es precisar "de qué está hecha" esta duración. A partir de cierta edad la duración se lee naturalmente sobre un reloj, pero de allí no surgen sin embargo las velocidades, puesto que éstas se reducen a poner en correspondencia las velocidades precedentes con las de las agujas de un reloj. Hay por consiguiente allí un razonamiento circular, y sin la ayuda de un reloj parecería todavía más vicioso: la duración, implícita o explícita según las situaciones, es en todo caso y en todos los niveles un cierto contenido de eventos, pero relativos a su velocidad de desarrollo. Dicho de otra manera, si $v = e:t$ (o bien $v = n:t$) se tiene, recíprocamente, $t = e:v$, o $t = n:v$. Y hemos ya mostrado que esto es psicológicamente verificable. De aquí resulta que las diferentes formas de cambios comprobadas por nuestros sujetos dan lugar simultáneamente a evaluaciones de velocidades y de tiempo, y aquí está sin duda la razón por la cual la puesta en fórmula de estas relaciones presenta tantas dificultades y demanda tanto trabajo. En efecto, si bien hay un círculo entre la velocidad y el tiempo, no es vicioso, sino que reposa en una simetría: la simetría de las correspondencias expresadas por nuestros esquemas I y II (en la sección I precedente). Aunque el sujeto llega en numerosos casos a estimaciones correctas y rápidas de la velocidad y de la duración, apoyándose únicamente en las relaciones de orden temporal y de orden espacial (o en frecuencias en sucesión), para tematizar la velocidad es preciso extraer por abstracción reflexiva relaciones de intervalos coordinando los dos sistemas simétricos (hasta entonces considerados como separados) de los espacios o frecuencias y de las duraciones como tales. Rencontramos pues aquí las combinaciones habituales de abstracciones empíricas y reflexivas.

Pero hay aún más en este caso particular: se trata de que, si bien la relación $v = e:t$ (o bien $v = n:t$) es general, sus términos deben reconstruirse en cada uno de los dominios o subdominios considerados y que, en el caso *4*], se deben tener en cuenta dos velocidades independientes que podrían parecer contradictorias (salvo que las ruedas dentadas sean del mismo diámetro en cuyo caso habría intersección entre los dos dominios).

[6] J. Piaget, *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, París, PUF, 1946.

D. *Generalizaciones constructivas.*[7] Conviene mostrar con un tercer ejemplo cómo las generalizaciones físicas, desde sus niveles elementales, tienen tendencia a rebasar su forma inicialmente inductiva y simplemente extensional (pasaje del "algunos" al "todos") en la dirección de formas constructivas y completivas por atribución de estructuras lógico-matemáticas a los objetos mismos, considerados entonces como operadores. Esta transformación de las generalizaciones consiste entonces en sustituir las variaciones extrínsecas de los fenómenos, comprobadas por vías exógenas, por sistemas de variaciones intrínsecos en tanto necesarios, o en tanto aperturas necesarias sobre posibilidades determinadas, pero inferidas o construidas deductivamente por vías endógenas. Un ejemplo simple pero elocuente de este proceso en física es la evolución de la cristalografía: luego de verificaciones empíricas sobre las formas geométricas de los cristales, se llegaron a construir los grupos de transformaciones de los cuales aquéllas pueden resultar y, en primera aproximación, se encontraron 32, todos ellos realizados en la naturaleza: un sistema de variaciones intrínsecas ha podido así subordinar enteramente a las variaciones extrínsecas inicialmente observadas.

Un pasaje elemental de lo extrínseco a lo intrínseco es ilustrado por las reacciones de los niños a los efectos móviles obtenidos por los desplazamientos de una trama que es superpuesta a otra (según el principio que, en el tejido de sedas, da los efectos que caracterizan a los *moirés*). Se utiliza un cartón *F*, que sirve de fondo estable. Este cartón tiene trazos paralelos; haciendo variar la posición del cartón a derecha o izquierda, los trazos aparecen verticales, horizontales, o inclinados. Se utiliza también una mica transparente *T*, que se hace pasar sobre el cartón. Esta mica tiene trazos similares, pero sólo se los presenta en vertical o en horizontal. Los efectos que es posible obtener al hacer pasar la mica transparente sobre el cartón que sirve de fondo, o en simple presentación estática son: *1*] las líneas de *T* recubren a las de *F*, sin cambiar la figura total; *2*] yuxtaposición, cuando las líneas de *T* se ubican en los espacios libres de *F*, de lo que resulta una figura negra; *3*] un pasaje continuo entre las alternancias de negro y de blanco, cuando las líneas de *F* y de *T* están ambas en presentación vertical; *4*] cuadrados, cuando las líneas de *F* y de *T* son perpendiculares; *5*] rombos inmóviles, orientados en un sentido o en el otro, cuando las líneas de *F* son oblicuas y las de *T* son horizontales; *6*] efectos de movimientos aparentes o especies de ondas, con desplazamientos de los rombos hacia arriba o hacia abajo, y desviaciones a la izquierda o a la derecha, cuando las líneas de *T* son verticales y las de *F* oblicuas.

Con este dispositivo, asistimos a un desarrollo continuo que con-

[7] J. Piaget y colab., *Recherches sur la généralisation*, París, PUF, 1978, EEG 36, cap. 8.

duce de la simple verificación de efectos no previstos ni comprendidos (y que no consisten pues sino en variaciones extrínsecas) a una deducción o composición gradual tal, que cada etapa abre nuevas posibilidades hacia las siguientes, hasta llegar al sistema cerrado constituido por las variaciones intrínsecas descritas precedentemente. El punto de partida es tan empírico o "extrínseco" que, habiendo comprobado una superposición *1*] por recubrimiento de las líneas horizontales de *T* y de *F*, hecho de izquierda a derecha, los sujetos de 4-5 años dudan que el efecto sea idéntico si vamos en sentido inverso. (Mag, de 5 años 2 meses, lo expresa así: "Puede ser que sea lo mismo, pero no sé.") No hay entonces previsión de los efectos de alternancia *3*] , ni siquiera de yuxtaposición *2*] . Hacia los 5-6 años los sujetos llegan a prever los cuadrados *4*] , una vez que han comprobado las variaciones precedentes. Pero esta previsión es por imaginación figurativa de lo que daría una trama puesta sobre otra, con orientación perpendicular de las líneas, en tanto que si damos al sujeto 2 o 4 regletas para reproducir los efectos observados (e incluso previstos), los tanteos son múltiples. En otros términos, aún no hay deducción basada en los movimientos, sino simple superposición figural de dos conjuntos de líneas. Por el contrario, en el nivel operatorio de los 7-8 años, las variaciones posibles de las figuras comienzan a convertirse en intrínsecas, basadas en combinaciones de movimientos calculados o deducidos, con explicaciones adecuadas en el caso de 2 o 4 elementos. Aunque asistamos entonces a un progreso considerable, es muy instructivo comprobar cuán lentos son los progresos en la generalización, que avanza paso a paso, centrándose en los problemas particulares, sin ver el conjunto de los posibles; en otros términos: aislando los problemas sin tratar de estructurarlos. En ese nivel —que llamamos II*A*— las previsiones son función de las diversas posiciones de las líneas en el cartón *F*, pero el sujeto no tiene aún en cuenta las dos orientaciones posibles de *T*, según que el movimiento de *T* tenga lugar en el prolongamiento de las líneas (horizontales en ese caso) o perpendicularmente a ellas (verticales en ese caso). De la misma manera, no llega a descomponer, cuando se trata de un rombo o incluso de un cuadrado, los lados que provienen de *T* y los que provienen de *F*.

Solamente en el nivel II*B* (9-10 años) las diversas variaciones son bien disociadas y deducidas, pero sólo por ensayos y tanteos, paso a paso. En particular, los sujetos saben mostrar, utilizando 4 cuadrados, que los rombos "así (*T* vertical) suben, y así (*T* horizontal) no se mueven" (Rol, 9 años 6 meses). Pero esos movimientos aparentes son aún concebidos como reales, en el sentido que los rombos son considerados como objetos permanentes, cada uno de los cuales conserva, al desplazarse, sus mismos cuatro lados. Finalmente, en el nivel III (11-12 años), todos los posibles son previstos y explicados, y el movimiento aparente es calificado de "impresión": "Las líneas de *T* van a

subir. . . todas juntas sobre las líneas de *F*; entonces tendremos la impresión de que hay un entrecruzamiento que sube", dice Per, de 11 años 5 meses. Hacemos la experiencia, y continuamos el diálogo con Per: "Se ve una especie de rombos que suben. (¿Son siempre los mismos o son nuevos?). Son nuevos, porque son siempre las mismas líneas que pasan." Otro sujeto lo expresa así: "el ángulo desaparece (= se desplaza) cada vez más, entonces sube" y "la línea siguiente llega ahí donde estaban las otras".

Esta evolución, con relativización final del movimiento aparente, es notable por muchas razones. En primer lugar, resulta claro que las variaciones del dispositivo comienzan bajo una forma "extrínseca", es decir que son simplemente comprobadas empíricamente, sin anticipación ni explicación posterior. Por el contrario, al final del desarrollo se trata de variaciones intrínsecas, en tanto están lógicamente implicadas en los vínculos del sistema y en tanto son deducidas por el sujeto de manera exhaustiva, recubriendo el conjunto de las posibilidades compatibles con esos vínculos. En segundo lugar, el interés de las reacciones propias de los niveles descritos reside en que esas posibilidades no son en modo alguno percibidas de inmediato y en bloque, sino que resultan de aperturas sucesivas sobre nuevos posibles, los más cercanos a las variaciones descubiertas precedentemente. Si esas aperturas no son inmediatas es porque comportan una dimensión negativa o, si se prefiere, dialéctica: la supresión, paso a paso, de las limitaciones precedentes; en otras palabras, la negación de la exclusividad o de la unicidad de la posibilidad anterior en beneficio de la variación que menos difiere de la anterior. Hay entonces una composición de afirmaciones y de negaciones que puede expresarse como "no solamente x sino también x'". Habiendo comprobado la superposición sobre *F* (efecto 1) como resultado del pasaje en horizontal de *T* sobre *F*, el sujeto llega a comprender que ese movimiento no llega "únicamente" a ese efecto, sino que también puede engendrar yuxtaposiciones. Si *T* pasa sobre *F* no puede hacerlo "únicamente" en el sentido de las líneas de *F* "sino también" perpendicularmente. Y lo mismo para el pasaje de las perpendiculares a las oblicuas, etcétera.

Desde el punto de vista de la historia de las ciencias, puede resultar interesante comparar la lentitud con que el sujeto descubre una posibilidad abierta por la precedente, con los intervalos a menudo considerables que intervienen entre los descubrimientos de un precursor y los trabajos ulteriores o los logros del realizador. Aun si se puede pensar en una "ruptura epistemológica" en el sentido de Bachelard, subsiste el problema de comprender por qué un autor que descubre algunas relaciones parciales no se percata de entrada por lo menos de algunas de las posibilidades que abren, por muy limitadas que sean en un comienzo. Tomemos el ejemplo de Apolonio:

¿por qué, habiendo tomado por ejes de coordenadas una tangente y su diámetro correspondiente, en su estudio de las cónicas (como lo hemos visto en el capítulo histórico de la geometría) se quedó allí en lugar de construir, aun en ausencia de un álgebra que lo apoyara, otras relacions interfigurales? Tomemos otro ejemplo, el de un creador cuya obra presenta al máximo las apariencias de una "ruptura": ¿por qué Darwin ha debido tomarse un tiempo tan considerable para pasar de una de sus ideas a otras que aquélla implicaba? (como lo ha mostrado H. Gruber).[8] Las razones parecen ser de dos tipos. Una de ellas es que, para resolver un problema particular, uno se centra en los datos en juego con predominio de las abstracciones empíricas (o "seudoempíricas" si se trata de los resultados de operaciones) y de generalizaciones inductivas de naturaleza extensional, y por consiguiente limitadas, mientras que para pasar a las generalizaciones constructivas y a la supresión de las limitaciones es necesario una inversión de sentido y un recurso a las abstracciones reflexivas que permiten poner de manifiesto a título de objetos de pensamiento explícitos, las operaciones utilizadas precedentemente a título instrumental. Y estas inversiones o alternancias no son en modo alguno fáciles y no podrían ser inmediatas. En segundo lugar, un conjunto de variaciones intrínsecas posibles constituye una estructura, y es bien conocido el retardo de la construcción de las estructuras con respecto a la puesta en obra de las operaciones que involucran. Esto se debe a que la estructura exige un grado superior de abstracciones reflexivas y de generalizaciones completivas, en tanto implica composiciones entre operaciones: se trata entonces de operaciones "sobre" los componentes, lo cual supone un nuevo equilibrio entre las diferenciaciones y las integraciones, con un "cerramiento" del sistema.

En el caso particular del último ejemplo que hemos visto, nuestros sujetos llegan a este cerramiento cuando terminan por comprender la razón de las diferencias entre las situaciones con figuras estáticas y los movimientos aparentes, y por explicar estos últimos por medio de una relativización de los desplazamientos. Tales relatividades caracterizan, en efecto, todas las estructuras físicas donde intervienen varios sistemas de referencia. Por lo demás, su interés estriba en llevarnos a distinguir dos formas de generalizaciones constructivas, de las cuales la segunda es jerárquicamente superior. La primera sólo se reduce a integrar un sistema ya conocido en un sistema más amplio, en el cual se torna un subsistema, pero sin enriquecimiento retroactivo. Por ejemplo, habiendo comprendido la formación de los cuadrados, el sujeto la generaliza luego a las de los rombos, que engloba a los primeros, a título de subsistema, en un sistema más extenso, pero sin modificar la clase precedente. Por el contrario, cuando el sujeto

[8] H.E. Gruber, *Darwin on man*, Nueva York, E.P. Dutton, 1974.

comprende la relatividad de los efectos de movimientos aparentes, no se contenta con generalizar a esta última situación lo que aprendió de las precedentes, sino que además las enriquece retroactivamente descubriendo que todas las figuras producidas, tanto estáticas como cinéticas, se deben a este mismo principio general.

E. *Reinterpretación de las variables.* Después de haber examinado las alternancias de abstracciones empíricas y reflexivas y sus relaciones con los dos tipos de generalizaciones en dominios tanto idénticos como diferentes, nos queda por buscar las convergencias (mucho menos aparentes) entre la historia de las teorías y la génesis de las nociones cuando se trata de reinterpretar las variables para someterlas a los mismos principios de conservación, pero con ampliación en nuevos dominios. En el campo de la física, de Newton en adelante, se han podido distinguir dos tipos de procesos a este respecto. El primero está caracterizado por el hecho de que un principio único de conservación, en un comienzo considerado suficiente, es luego completado por otro más o menos análogo, pero luego ambos resultan necesarios sea conjuntamente, sea por alternancias. Es bien sabido, por ejemplo, que los cartesianos explicaban la transmisión del movimiento por la sola conservación de mv, mientras que los leibnicianos aplicaban sólo la conservación del invariante mv^2, siendo que se trataba de dos consecuencias diferentes y necesarias de la ley de Newton.[9]

Un segundo proceso interviene cuando una misma expresión conservativa, tal como la función H de Hamilton (resultante ya de por sí de una reinterpretación de las variables newtonianas y lagrangianas en términos de velocidades y de cantidad de movimiento), da lugar a nuevas reorganizaciones de variables para aplicarse a un nuevo dominio, como la microfísica. Estas teorías lentamente elaboradas por los físicos pueden parecer muy alejadas de las reacciones de los niños frente a problemas que enfrentan por primera vez, y por consiguiente las comparaciones podrían parecer excesivamente osadas. Sin embargo, encontramos que la sucesión de las soluciones obtenidas por estadios de edad recuerdan, *mutatis mutandis*, los dos procesos anteriormente descritos.

1] En lo que respecta al caso de un principio de conservación que en un comienzo es único y que luego es disociado en dos, se pueden citar ciertas reacciones interesantes desde el punto de vista de la lógica natural (en el sentido en que se habla de los números "naturales" refiriéndose a su genésis precientífica). Consideremos el ejemplo de las transformaciones de perímetros o de superficies de rectángulos fá-

[9] Es bien sabido que Descartes no tenía la idea vectorial de velocidad (ni, por otra parte, tampoco la tenía Leibniz) y por consiguiente, la fórmula era errónea aun para la conservación.

cilmente descomponibles. A la edad de 9-11 años, cuando las conservaciones se generalizan a todos los dominios, observamos que los niños afirman la invariancia simultánea de estas superficies y de estos perímetros,[10] como si las modificaciones visibles de las dos dimensiones de la figura debieran compensarse necesariamente desde estos dos puntos de vista a la vez. Sin embargo, una de las figuras utilizadas tiene por perímetro un hilo cerrado y no elástico, el cual es desplazado por el niño mismo de tal manera que se desplacen los ángulos, por medio de un alfiler: en este caso la superficie disminuye tan evidentemente con el alargamiento del lado mayor del rectángulo que termina por anularse cuando las dos partes del hilo se tocan y no forman más que una larga línea doble. Sin embargo, hay sujetos de 11 años que continúan manteniendo en este caso límite que la superficie permanece la misma y se sitúa "entre las dos líneas" (Cha 11;9), es decir en un espacio que se ha hecho invisible. Recíprocamente, cuando el rectángulo está formado por 8 bandas de cartón, primero acostadas de tal manera que formen un cuadrado, luego dispuestas en un rectángulo de cuatro por dos, etc., hasta llegar a la disposición uno por ocho, el perímetro, pasa del caso simple del cuadrado a más del cuádruple. Sin embargo, estos sujetos piensan que permanece constante por compensación de los alargamientos y de las disminuciones de anchura: "los lados, la superficie, eso no ha cambiado", dice, por ejemplo, Geo (11;2). —¿Y el perímetro?—. – "Tampoco. Hay más en el largo pero menos en el ancho, y esto equivale a lo mismo", dirá Cal (11;5).

Nos encontramos así en presencia de una forma global de conservación, fundada en una inferencia correcta en su principio, pero generalizada a pesar de los datos perceptivos más evidentes. El progreso y la solución consisten entonces en disociar las variables, que si bien eran distintas fueron tornadas falsamente solidarias, por un ansia de unificación lógica y de aplicar separadamente el esquema deductivo de las compensaciones. Es lo que hace por ejemplo un sujeto de 11 años, que concluye: "cuando la superficie cambia, el perímetro no cambia, y cuando la superficie no cambia, el perímetro cambia; los dos cambian, pero no al mismo tiempo".

Tenemos así el ejemplo de una misma estructura de conservación, pero aplicada a dos clases de variables después de reinterpretar a éstas en el sentido de su independencia. Hemos señalado que en los niveles superiores (9-12 años) donde la abstracción reflexiva tiene prioridad sobre la empírica, debe retornarse a esta última para las verificaciones de hecho. Cuando la lectura empírica de los datos domina todavía la deducción (lo que ocurre en las edades inferiores a aque-

[10] J. Piaget y colab., *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, París, PUF, 1977. EEG 34 y 35, vol 2, cap. 12.

llas que han sido consideradas) las respuestas son, curiosamente, mejores en sus contenidos, pero menos interesantes puesto que no atestiguan todavía esa preocupación por la sistematización de todas las compensaciones a la vez que conducen al error de los sujetos de penúltimo estadio mencionado hace un instante.

2] Los hechos que siguen se refieren por el contrario al caso en que una noción de conservación es ampliada por una reorganización de las variables consistente en agregarlas, bajo formas nuevas, a aquellas que estaban siendo utilizadas precedentemente. Se trata de un dispositivo complejo cuya comprensión está lejos de ser inmediata en el adulto medio (caso de un estudiante que no sea de física). Se toman dos péndulos inicialmente verticales ligados por un elástico horizontal:[11] cuando uno balancea el primer péndulo *A* su movimiento es poco a poco transmitido al segundo, *B*, pero a medida que la actividad de este último crece, la del primer péndulo decrece. El problema principal reside en que se produce una inversión de los papeles: el segundo péndulo se hace activo y "arrastra" luego a su vez los movimientos del primer péndulo que se ha hecho pasivo, y así sucesivamente por alternancias repetidas entre *A* y *B*, es decir por intercambios de energía (aun cuando se pueda dar cuenta de estos hechos en términos de empujar y jalar).

En el curso de un primer estadio, el sujeto llega después de varias verificaciones a comprender que ha habido transmisión de movimiento gracias al elástico, pero esta transmisión, que no estaba prevista, no parece constituir para el sujeto una conservación. En efecto, después de la reactivación de *A*, la transmisión es explicada simplemente por el hecho de que después de las oscilaciones de *B*, el péndulo *A* "ha retomado su impulso", como si el impulso pudiera perderse y reconstituirse. En el curso del estadio II, la transmisión es prevista y la reactivación de *A*, una vez comprobada (pero no todavía prevista), se explica por la recíproca. En un nivel II*B* (10-11 años) surge un comienzo de previsión, pero sin continuación. En un estadio III, finalmente, una parte de los sujetos (de 12 a 15 años) prevén y explican el conjunto del proceso, lo cual es ciertamente notable.

En este caso hay dos tipos distintos de transmisión que atestiguan una extensión de la conservación: una transmisión simple del movimiento de *A* a *B*, pero además, una alternancia de los papeles activos y pasivos de los elementos *A* y *B*, lo que equivale a la transmisión de un "poder" y no sólo de un movimiento. Intervienen pues aquí, y esto de una manera muy notable, una reorganización de los observables que conduce hasta la idea de la delegación alternada de un poder que se conserva a su vez cambiando de sostén. No pretendemos, na-

[11] J. Piaget y colab., *La formation de la notion de force*, París, PUF, 1973, EEG 29 cap. 5.

turalmente, que estos sujetos tengan ya una idea clara de energía, pero no es menos cierto que estamos frente a un ejemplo de extensión de una forma inicial de conservación que requiere una reorganización de las variables y una disociación de dos tipos de invariancias.

III. VERIFICACIÓN DE LAS FASES DE TRANSICIÓN EN EL CASO DE LA PSICOGENÉSIS DE LOS PESOS[12]

A. El peso es una de las nociones cuyo desarrollo es más complejo por varias razones. Como propiedad de los objetos (indiferenciada de la masa) no constituye un observable simple, sino que depende a la vez de la cantidad de materia y de su característica más o menos "llena" (mucho antes de la densidad). Además, como fuente de acciones provoca otras múltiples de las cuales la caída de los cuerpos (o por lo menos su tendencia a descender) no es por cierto la primera en ser descubierta. Por otra parte, esta noción constituye también un buen ejemplo de los procesos *intra-*, *inter-*, y *trans-* en la sucesión de las interpretaciones construidas por el sujeto, que llamaremos *T*1, *T*2, etc., como si se tratara realmente de "teorías". Primero las describiremos, para buscar luego los mecanismos formadores.

Una primera interpretación *T1* es aquella donde no intervienen más que descripciones de observables o de relaciones entre ellas: el peso es función del tamaño evaluado ordinalmente sin aditividad operatoria. Varía pues según las posiciones (no hay conservación para dos pesos según que estén yuxtapuestos, o uno sobre otro, o bien suspendidos de hilos largos o cortos, etc.). Varía igualmente según las velocidades, en sus poderes varios (fuerzas de choque o de resistencia, etc.), pero, como hemos visto en la sección II, a este nivel, no es en modo alguno fuente de presiones permanentes: el equilibrio de una balanza de brazos de las mismas longitudes no se debe a la igualdad de los pesos, sino a su simetría, y el sujeto piensa que el equilibrio se pierde en el caso de dos pesos iguales pero de formas diferentes, o cuando se trata de dos pesos colgados de un lado y dos iguales del otro, en lugar de ser uno y uno.

Un modelo *T*2 comienza hacia los 7-8 años con la aditividad de los pesos, es decir con su conservación en caso de cambio de posición, sin cambio de forma de los elementos. Resulta así que en los casos simples (es decir antes de la comprensión del "momento") el equilibrio de una balanza es interpretado en función de la igualdad de los pesos, en tanto fuerzas opuestas. Pero el peso de un objeto no se conserva en caso de cambio de forma (por ejemplo cuando se trata de una bola de plastilina estirada hasta convertirla en una salchicha) y, por

[12] J. Piaget y R. García, *Les explications causales*, París, PUF, 1971, EEG 26.

consiguiente, no es todavía proporcional a la cantidad de materia que sí se conserva (estas nociones serán adquiridas en *T3*). El peso no está aún ligado a la caída vertical y se asiste todavía en algunos casos a confusiones residuales entre jalar hacia abajo y retener; por ejemplo, en las cuestiones de contrapeso, los sujetos en *T2* saben bien que una placa que sobresale del borde de una mesa puede ser retenida poniendo un contrapeso sobre la extremidad que permanece sobre la mesa, pero ocurre a veces que el niño agregue un peso sobre la extremidad libre para retener mejor la totalidad. De la misma manera, cuando se suelta una regleta en posición inclinada, algunos sujetos prevén una caída que no es vertical, sino que está orientada en la prolongación de la inclinación de partida. Suponen que un vagón sobre un plano a 45 o 90 grados requiere más fuerza para ser retenido en su lugar que para ser jalado hacia arriba, puesto que en su lugar tiene tendencia a descender, mientras que si uno lo sube, esta tendencia desaparece.

Estas diversas cuestiones son resueltas en *T3*, cuando la conservación de los pesos en caso de cambios de forma es adquirida, y cuando la caída vertical es comprendida, con la construcción de los sistemas de coordenadas naturales. El ejemplo más característico a este respecto es la previsión y la explicación de la horizontalidad del nivel del agua. Hasta entonces el agua es tenida por "ligera", por ser móvil (mientras que el hielo es juzgado más pesado por ser sólido) y el descenso de un curso de agua a su fuente no es atribuido al peso sino al hecho de que hay una abertura libre del lado de la pendiente y obstáculos exteriores que impiden que suba. Hacia los 9 años, por el contrario, el agua desciende porque es pesada, y en estado inmóvil su nivel se torna horizontal porque, en caso de inclinación, las partes elevadas descienden sobre las otras.

Pero este progreso en el vínculo entre los pesos y la caída vertical de los cuerpos se paga con una regresión aparente hacia la no aditividad en el sentido que se piensa que un objeto pesa más estando abajo que en lo alto de un hilo, etc.: en realidad se trata de hipótesis debidas a los avances en la comprensión del dinamismo, y no a una falta de coordinación con la cantidad de materia. Este factor dinámico permanece de hecho en acción, y en caso de conflicto (en particular cuando se presenta el problema de la invariancia), el sujeto llega a formular compromisos variados: el peso se conserva pero el "da", se "apoya" o "pesa" más o menos según la situación.

La prueba de estas complicaciones dinámicas propias de estas interpretaciones *T2* —que no ponen en juego la aditividad de los pesos— es que, considerando cuatro o más pesos iguales ($A = B = C = D$) los sujetos de estas subetapas (7 a 8 años) comienzan a admitir las igualdades $A + B = C + D$, etc., pero sólo si se trata de objetos homogéneos (por ejemplo cuatro bloques de madera parecidos), mientras

que en la fase *T3* (9 a 10 años) lo generalizan a casos de objetos heterogéneos (por ejemplo tres barras de latón y un trozo de plomo). Debemos agregar el hecho esencial de que es igualmente en este nivel *T3* que logran de manera operatoria la seriación de los pesos *A*, *B*, *C*, con la transitividad ($A < C$, si $A < B$ y $B < C$). (Recordemos que la transitividad ya está establecida desde los 7 años para las longitudes.) Se ve así la coherencia en la significación general de estas interpretaciones *T3*.

Pero no es sino al nivel *T4* (11 a 12 años) que se logran las cuantificaciones más generales, y eso gracias a que entonces los pesos son no solamente puestos en relaciones entre sí o con las direcciones de sus acciones, sino que son además compuestos con las diferentes dimensiones espaciales de los objetos: el volumen para las cuestiones de densidad y de flotación; la superficie para la presión; las longitudes para el momento, etcétera.

En lo que respecta a la densidad, los sujetos de nivel *T1* prevén que el peso es proporcional al volumen, mientras que desde los comienzos de *T2* se obtienen respuestas tales como "hay cosas grandes que son más livianas que las pequeñas". Pero esto sólo en función de sus cualidades intrínsecas: "porque esto es arcilla y eso otro es piedra". Es así como, para lograr el mismo peso que el de un tapón de corcho, el niño sabrá ahora formar una bolita de plastilina más pequeña, mientras que en el nivel *T1* la construía de un volumen igual o aun más grande. Por el contrario, para obtener el peso de la mitad del tapón, sólo en la etapa *T3* (9 a 10 años) el sujeto podrá simplemente dividir su bola de plastilina en dos. En esta misma etapa *T3*, las densidades desiguales son interpretadas como resultante del carácter más o menos "lleno" de los objetos. Finalmente, en el nivel *T4* esta noción cede lugar a un concepto de rango netamente superior: el de "estar más juntos" con respecto a una noción corpuscular, lo que provee la razón de la relación inversa de los pesos y de los volúmenes que caracterizan el aumento de las densidades. Notemos además que en este mismo nivel la dilatación de un grano de maíz calentado no se atribuye ya a un aumento de la materia ni a un simple hinchamiento, sino a una decompresión: el peso sigue siendo el mismo, el número y el tamaño de los "pequeños granitos que están en el interior" también permanecen constantes, pero estaban muy juntos unos contra otros, mientras que "el aire caliente los separa" (Jac 12;0) y el volumen aumenta.

En cuanto a la flotación,[13] los sujetos de nivel *T1* se limitan a simples descripciones o hacen intervenir el peso, pero con contradicciones debidas a las supuestas relaciones proporcionales entre el peso

[13] B. Inhelder y J. Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París, PUF, 1955, cap. 2.

y el volumen, o bien a las ambigüedades de los efectos dinámicos invocados. Por ejemplo, los barquitos pequeños flotan porque son livianos y el agua los soporta, mientras que los grandes flotan porque son pesados y se pueden sostener a sí mismos. En los niveles *T*2 y *T*3 el peso se torna relativo en un doble sentido. Por una parte, desde el punto de vista de las densidades cualitativas: la madera flota porque es liviana y la piedra se hunde porque es pesada, etc. Pero, por otra parte, hay un comienzo de relación con el volumen de agua: un barco grande es pesado para nosotros pero es liviano para el agua. Hacia fines de la etapa *T*4 un cuerpo flota porque es "más liviano que el agua a igual volumen; una llave no flota (dice por ejemplo Ala a los 11;9) porque el mismo contenido de agua sería menos pesado que la llave". O, como dice otro niño: "será necesaria mucha más agua que metal para ser el mismo peso". Para una bola de madera, otro niño llega a decir: "uno fija el nivel del agua; se mete la bola y se hace correr el agua que da la diferencia con lo que haría antes". —¿Y qué es lo que tú comparas?— . "El peso del agua que se ha derramado y el peso de la bola." Sorprendentemente, esto no es sino el llamado principio de Arquímedes, que no había sido aprendido en la escuela por este niño.

En cuanto a la presión, con sus relaciones inversas con la superficie, es también en la etapa *T*4 (hacia los 11 a 12 años) que es comprendida. Por ejemplo, una barra de metal "presiona más cuando está vertical puesto que todo el peso está allí (señalando la base), mientras que si se pone horizontal el peso se reparte", dice Duc (10;10). La razón es que tal relación implica dos condiciones. La primera es que los cuerpos que ejercen o sufren la presión sean concebidos como continuos, y por consiguiente tales que sus sectores permanezcan solidarios, de tal manera que la totalidad del peso sea "repartida" si la superficie de contacto es grande, y "concentrada" si es pequeña (Yva 12;6). La segunda condición es la conservación del peso, no obstante sus diferencias en la superficie de aplicación. Sin embargo, antes de este último nivel los niños piensan que un objeto alargado, que rebasa los bordes del platillo de una balanza, pesa menos sobre éste que cuando lo arreglamos de tal manera que nada rebase (y nos ha ocurrido el encontrar esta opinión hasta en personas adultas, ¡incluso en personas que venden comestibles!).

Debemos aún señalar que hasta el nivel *T*3, en el caso de un recipiente cilíndrico con un pequeño agujero lateral, la presión del agua que hace un chorro por allí no depende solamente, para los niños, de las capas superiores, sino también de las que están por debajo del agujero.

En cuanto a las relaciones $p/p' = L'/L$ de los pesos $p > p'$ y las longitudes $L < L'$ sobre los brazos de una balanza, es también en el nivel *trans-* que son establecidas y explicadas: "cuando la distancia es

grande, el peso debe ser más pequeño. . . las distancias y los pesos es un sistema de compensaciones", dice Chal (13;6). Las razones que invocan tienen que ver con el trabajo realizado: "hace falta más fuerza para levantar un peso alejado que cuando está más cerca del centro" (Sam 13;8).

B. Si hemos recapitulado así el conjunto de estos hechos ya conocidos, no es sólo para limitarnos a mostrar que la sucesión misma de estas interpretaciones *T*1 a *T*4 provee un excelente ejemplo global del pasaje del "intra-factual" inicial (*T*1) a un "trans-factual" final (*T*4), a través de dos etapas progresivas de "inter-factual" (*T*2 y *T*3): ¡esto es evidente y podría incluso ser previsto! El problema epistemológico más interesante está todavía por ser considerado. En la medida en que se trata de hechos físicos, y por consiguiente de explicaciones causales y no de simples estructuras lógico-matemáticas, nuestro objetivo es analizar los mecanismos de transición que aseguren el pasaje de un *Tn* a un *Tn* + 1 para poder discernir lo que corresponde, respectivamente, a la estructuración endógena y a los datos exógenos, a fin de buscar si sus interacciones progresivas son comparables a la imagen que hemos obtenido en capítulos precedentes en el análisis histórico-crítico. En efecto, para el positivismo ortodoxo, el conocimiento físico sólo consiste en una acumulación de informaciones exógenas, que se traducen por medio de un lenguaje matemático que sirve sólo para describirlas con un simbolismo preciso. En el nivel de la psicogénesis —cuando este lenguaje no está todavía adquirido— el papel de lo exógeno debería ser, por consiguiente, proporcionalmente mucho más considerable. De aquí proviene el interés especial de nuestras comparaciones entre la psicogénesis y la historia, en un dominio privilegiado donde estas comparaciones pueden ayudar a dar respuesta a uno de los problemas más centrales de la epistemología.

1. El primer problema concierne a la naturaleza de la interpretación *T*1 presentada aquí como inicial (ante la imposibilidad de poder interrogar sobre los pesos a niños de pecho que todavía no saben hablar. . .). Cuando se lee nuestra descripción, parecería que este presistema *T*1 no consiste sino en una colección de observables a la vez momentáneos (salvo por las relaciones bastante constantes aunque a menudo refutadas entre el peso y el tamaño), locales (posiciones de los objetos) y en su gran mayoría inexactas cuando no directamente erróneas. Podría parecer, además, que las lagunas se deben a una ausencia completa de actividades estructurantes por parte del sujeto puesto que todavía no ha puesto en obra ninguna conservación, ninguna aditividad, etc., sino a lo sumo ciertas simetrías perceptivas; esto equivale a decir que los observables en juego en este nivel inicial no consistirían más que en un producto de lecturas defectuosas, que permanecen en el estado puro de registros exógenos.

Sin embargo, esto es totalmente falso puesto que (como ya lo hemos dicho en nuestra Introducción) las "lecturas" son el producto de asimilaciones a esquemas del sujeto, y si se redujeran a simples "copias" (en el sentido del empirismo de Hull) surgirían múltiples problemas para dar cuenta de los casos en que las "lecturas" son deformantes. Las características de la interpretación *T*1 deben pues buscarse en una interacción entre los objetos y las acciones del sujeto, pero tomando en cuenta que se trata de acciones que todavía no están coordinadas en operaciones coherentes y que se limitan a aceptar lo que ellas provocan o descubren (y, efectivamente, la evaluación de los pesos por la mano varía según las situaciones). Lo que nos interesa entonces en este presistema *T*1 no son sus defectos (aunque siempre es muy instructivo comprobar los errores del punto de partida para poder juzgar las dificultades considerables que hay que vencer y el largo camino por recorrer en la conquista de la verdad). Lo que nos interesa es el carácter complejo del doble círculo que relaciona a la vez el sujeto y el objeto, tanto como los observables y las coordinaciones inferenciales. (Este último término es un término global que vamos a diferenciar en lo que sigue entre abstracciones, generalizaciones y composiciones.) Es este carácter doblemente circular el que dará cuenta, en lo que sigue, de los bucles o alternancias entre las acciones sucesivamente recíprocas que caracterizan los pasajes tan poco lineales de *T*1 a *T*2, a *T*3 y a *T*4, comunes a la historia de las teorías y a los estadios más elementales de la psicogénesis.

En efecto, si llamamos *Obs. O*(n) a los primeros observables detectados sobre el objeto en función de las acciones del sujeto, y *Obs. S*(n) a lo que aprende este último con respecto a sus propias acciones; *Coord. S*(n) la manera en la cual el sujeto las coordina, y *Coord. O*(n) las coordinaciones entre los *Obs. O*(n) el doble círculo es entonces el siguiente:

$$\begin{array}{c} \overset{\longleftarrow\;O\;\rightarrow\;S\;\longleftarrow}{} \\ [Obs.\,S(n) - Coord.\,S(n)] \rightleftarrows [Obs.\,O(n) - Coord.\,O(n)] \\ \underset{\longrightarrow\;S\;\rightarrow\;O\;\longrightarrow}{} \end{array}$$

Esto equivale a decir que el sujeto no tiene conocimiento de sus acciones sino a través de sus resultados sobre los objetos, pero también que no comprende éstos sino por medio de inferencias que extrae de las coordinaciones de sus propias acciones. Como *Obs. O*(n) y *Coord. O*(n) van a dar nacimiento, una vez reunidos, a nuevos *Obs. O*($n+1$); y *Obs. S*(n) + *Coord. S*(n) a nuevos *Obs. S*($n+1$), el círculo recomienza.[14] Es esta situación compleja lo que explica la for-

[14] J. Piaget, *L'equilibration des structures cognitives*, París, PUF, 1975, FIG. 33, cap. 2, pp. 58-64.

mación de *T1*. Para dar cuenta de los pasajes sucesivos de *T1* a *T2*, etc., será suficiente con establecer las distinciones siguientes que corresponden a las diferenciaciones y construcciones efectuadas por el propio sujeto:

a] Los observables *Obs* serán de dos tipos, según que sean descubiertos por abstracción empírica o construidos a partir de coordinaciones, por abstracciones reflexivas, no obstante tener que ser verificados por nuevas experiencias.

b] Las coordinaciones serán de dos tipos: según que procedan sobre la base de generalizaciones constructivas extraídas de las abstracciones reflexivas, o por extensión de los dominios de aplicación.

c] Las interpretaciones *Tn*, podrán entonces ser vinculadas por composiciones operatorias que equilibran las diferenciaciones y las integraciones.

En una palabra, pasamos así de la generalización del esquema precedente al de la sucesión de las teorías históricas, tal como fue expresado anteriormente.

2. Retornando a la psicogénesis del peso, se trata de dar cuenta de las adquisiciones y de las lagunas de la interpretación *T2*. Las primeras son fáciles de comprender, puesto que se trata de la actividad de los pesos equivalentes y de su conservación, ambas independientemente de las posiciones relativas (superposiciones, yuxtaposiciones, etc.), pero a condición de que los objetos en juego no cambien sus formas individuales. Dos observaciones preliminares se imponen a este respecto. La primera es que, si tenemos por ejemplo cuatro bloques de madera $A = B = C = D$, podría bastar con experiencias simples (por ejemplo con la balanza) para mostrar que $A + B = C + D = A + C =$ etc. Sin embargo, el niño no parte en modo alguno de allí y, si llega a hacerlo, podemos comprobar que deduce los resultados antes de controlarlos. De aquí surge una segunda observación esencial: para hacer tales experiencias es necesario tener previamente la idea y ser capaz de programarla. Tales progresos, inaccesibles en el nivel *T1*, suponen precisamente la conquista previa de los conceptos de conservación y de aditividad, al menos en calidad de posibilidades nuevas. El problema consiste ahora en comprender el proceso que las ha posibilitado. Y la prueba de que se trata allí de un nuevo proceso (y de que, además, es necesario explicarlo), es que precisamente cuando el sujeto llega a concebir estas posibilidades, las realiza primero en pensamiento y postula de manera inmediata su resultado como necesario, ¡sin tener necesidad de experiencias!

Se ve entonces el papel evidente de la abstracción reflexiva. Comenzar por concebir los objetos *A*, *B*, *C*, *D*, aparentemente iguales en sus formas y valores cuantitativos, como variando sin cesar de peso según las situaciones y posiciones, es admitir un sistema complicado de modificaciones continuas, con ganancias y pérdidas explicables

localmente pero difíciles de cordinar: *A* sobre *B* pesa más que *A* al lado de *B* por adiciones de los efectos de presión; pero si *B* sobre *A* es igual a *A* sobre *B*, ¿por qué negar su igualdad en *A* al lado de *B* si recordamos que ambos pesan igual sobre un mismo soporte? En pocas palabras, desde el momento que existen modificaciones explicables separadamente, el sujeto pasa a los ensayos de coordinación, formulándose entonces los dos problemas inherentes a todo sistema de transformaciones: el de la frontera entre lo que varía y lo que permanece constante, y el de las compensaciones o no compensaciones entre las variaciones. Resulta entonces claro que sin ninguna medida ni cálculo alguno, la hipótesis más simple es que para objetos de formas y tamaños iguales que solamente cambian de posición, el invariante no es sino el peso mismo, lo que abre entonces la posibilidad de una actividad del sujeto mucho más general e inteligible que las acciones incoordinables precedentes: la aditividad en tanto operaciones componibles y reversibles. Tales son los conceptos teóricos que se construyen entre *T*1 y *T*2 (fase *inter-*) y que dan lugar a nuevos observables empíricos en *T*2. En cuanto a las lagunas de *T*2, si bien los pesos pueden adicionarse, queda aún por precisar en qué direcciones y sobre cuáles posiciones de los soportes actúan. Y aquí se trata de problemas de naturaleza muy diferente. Un peso que presione hacia abajo puede retener tanto como arrastrar (ya hemos visto las confusiones que subsisten en *T*2 en cuanto a la acción de los contrapesos). Por ejemplo, cuando se remonta un peso, para los niños de este nivel ya no tiende a descender, tal como se manifestaba cuando el peso estaba colocado sobre una pendiente. Su descenso, por otra parte, no siempre es vertical. En efecto, se trata aquí de cuestiones espacio-dinámicas, y serán necesarias nuevas construcciones operatorias por parte del sujeto para llegar a dominarlas.

3. El pasaje de la etapa *T*2 a la etapa *T*3, caracterizada por la conservación del peso en caso de cambio de forma de los objetos continuos, y por la conquista de las direcciones de empuje, es de un interés particular por el hecho de que todo lo adquirido en la etapa *T*3 podría aparecer meramente como el producto de puras abstracciones empíricas o de generalizaciones simplemente relacionales a partir de las propiedades ya conocidas en *T*2.

Comencemos por la conservación del peso en caso de cambio de forma. Podría parecer que un sujeto, admitiendo que cuatro cubos dan siempre el mismo peso total ($A + B + C + D$) cualquiera que sea su disposición espacial, comprenderá de entrada que una bola de plastilina transformada en cilindro alargado conservará el mismo peso, puesto que basta con seccionarla en partes y disponer éstas de otra manera para estar seguro de la equivalencia de su suma en posiciones iniciales y finales. Sin embargo, encontramos que para llegar allí el sujeto se ve obligado a realizar construcciones complejas en cuyo seno

la abstracción reflexiva y las composiciones operatorias desempeñan un papel necesario. Para empezar, se trata de comprender que un cambio de forma se reduce siempre a un desplazamiento de las partes, lo cual está lejos de ser una evidencia inmediata. Para llegar allí es necesario concebir el continuo como disociable en "fragmentos", separables en pensamiento, pero conectados de hecho y ligados por vecindades sin fronteras. En segundo lugar, es necesario admitir la "conmutabilidad" inherente a estos desplazamientos, o, dicho de otra manera, la equivalencia entre lo que es sustraído en el punto de partida y lo que es agregado en el punto de llegada. En tercer lugar, es necesario generalizar este proceso de manera "vicariante", aplicándolo a fraccionamientos y desplazamientos cualesquiera. Para retomar una fórmula ya utilizada en otra parte, tendremos pues:

$$[(aA1)\ U\,(A'1) = (A'1)\ W\,(bA1)] \Leftrightarrow [(aA2)\ U\,(A'2) = (A'2)\ W\,(bA2)] \Leftrightarrow \text{etcétera}$$

Donde $(aA1)$ y $(aA2)$, etc., son fragmentos móviles en sus puntos de partida; donde $(bA1)$ y $(bA2)$ son las mismas partes en sus puntos de llegada, donde $(A'1)$ o $(A'2)$ son los sectores que han quedado en su lugar durante las transferencias precedentes. En cuanto a U y W son las reuniones de $A1$ con $A'1$, o de $A2$ con $A'2$, pero en puntos diferentes.

Se ve entonces que esta relación de las conmutabilidades (expresadas por el signo =) y de las vicariancias (traducidas por ⇔) implica una parte importante de abstracciones reflexivas y de composiciones endógenas, aun cuando el resultado final —es decir, la conservación como tal— se haya convertido en un nuevo observable, accesible a cualquier comprobación empírica por medio de la balanza (pero esta última no da lugar a ninguna generalización considerada necesaria si el sujeto se queda en este empirismo simple).

En cuanto a la conquista de las direcciones espaciales (descenso del agua y horizontalidad de su superficie, explicada por el peso), se podría pensar también que se trata de simples descubrimientos empíricos. Por el contrario, nada de esto es posible sin la construcción de coordenadas, que comportan composiciones endógenas y, particularmente, abstracciones reflexivas.[15]

El papel de las operaciones del sujeto en la estructuración de los pesos, propio de este nivel $T3$, se marca igualmente de la manera más clara, cuando tiene lugar el pasaje *inter-* que conduce de $T2$ a $T3$, por la constitución progresiva de las seriaciones de pesos con transitividad, y por la generalización de la aditividad y de las equiva-

[15] Por ejemplo, la descomposición de oblicuas en sistemas ortogonales está virtualmente en acción desde que el sujeto concibe estas oblicuas como dependiendo de dos orientaciones a la vez. La abstracción reflexiva llega a explicitarlas disociando una de otra.

lencias transitivas entre pesos de objetos heterogéneos. Si no se tratara más que de inducciones extensionales de tipo empírico, no se comprendería este carácter tardío puesto que en otros dominios estas operaciones son corrientes desde los 7 u 8 años. En la hipótesis de una restructuración endógena total de un contenido empírico —más difícil de dominar a causa de sus características dinámicas—, este retardo es significativo.

4. Con los diferentes modelos de tipo *T*4, los progresos finalmente logrados pueden interpretarse de manera más sistemática en una fórmula que recubre todos los hechos indicados: es la coordinación de los pesos con las variables espaciales. Pero es necesario destacar aquí que esta coordinación tiene lugar en forma de una síntesis, es decir que llega a la formación de conceptos nuevos cuyas significaciones son generales, y no de simples funciones como en *T*3.

Se trata, primero, de la densidad en tanto relación constante entre el peso y el volumen; después, de la presión en relación con la superficie; y luego del "momento" por composición de los pesos y de las longitudes sobre los dos brazos de una balanza. Es también el caso de la flotación con las explicaciones que se aproximan al principio atribuido a Arquímedes. Inútil volver a resumir los hechos que hemos recordado más arriba. Lo que aquí importa concluir en la línea de las transiciones descritas hasta ahora, es que ninguno de estos conceptos (cuya verificación empírica posible en el nivel *T*4 los convierte en nuevos observables) ha podido construirse sin el aporte necesario de las construcciones endógenas y, especialmente, de las abstracciones reflexivas. La densidad, por ejemplo, podría parecer que está dada empíricamente desde los estadios iniciales, cuando los niños dicen que el hierro es "pesado" y la madera "liviana", cuando los objetos tienen las mismas dimensiones. Pero de allí a la noción de estar más o menos compacta y a la estructura corpuscular que ella implica hay tanta diferencia como la que separa una intuición global de una estructuración espacial que provee las "razones".

De manera general, el aporte de las construcciones endógenas, cuya importancia crece de *T*1 a *T*4, se marca así por dos tipos de efectos que son progresivamente complementarios. Se trata, primero, de una acción de estructuración progresiva de la realidad: a las abstracciones empíricas de la fase "intra-factual", que proveen los primeros datos, se suceden las construcciones inferenciales a base de abstracciones reflexivas y de generalizaciones completivas que ligan de manera "inter-factual" estos datos entre sí, y también con nuevas nociones. Dichas construcciones son primero deducidas, pero en la fase siguiente develan la existencia de nuevos observables que conducen a la extensión del dominio de conocimiento bajo la forma de nuevas "leyes". Esta estructuración "legal" de lo real hace intervenir cada vez mayor número de operaciones lógico-matemáticas del sujeto que

implican su propia necesidad interna. De aquí sigue un segundo grupo de efectos: la relación "trans-factual" que liga una interpretación o "teoría" Tn a la siguiente $Tn + 1$, resulta explicativa en la medida en que las operaciones del sujeto son atribuidas a los objetos. El proceso de esta atribución consiste en introducir la necesidad en sus relaciones factuales y no sólo en las relaciones implicativas entre una ley más general y las que ella engloba.

Si este análisis es exacto, no resultará carente de significación el comparar entre sí los mecanismos de transición entre las sucesivas interpretaciones físicas, ya sea que se trate de los niveles elementales de la psicogénesis o bien de los modelos o teorías de niveles superiores.

CAPÍTULO IX
CIENCIA, PSICOGÉNESIS E IDEOLOGÍA

En los capítulos precedentes hemos intentado mostrar en qué consiste la identidad de mecanismos entre los desarrollos psicogenéticos, relativos a la evolución de la inteligencia en el niño, y los desarrollos sociogenéticos, relativos a la evolución de las ideas directrices, de las conceptualizaciones y de las teorías en algunos dominios de la ciencia.

Hasta aquí el problema estuvo centrado en el sujeto del conocimiento, es decir, en el individuo que asimila los elementos que le provee el mundo exterior. En ese proceso de asimilación, el sujeto selecciona, transforma, adapta e incorpora dichos elementos a sus propias estructuras cognoscitivas, para lo cual debe también construir, adaptar, reconstruir y transformar tales estructuras. Nuestro estudio ha consistido en describir ese proceso, mostrando cuáles son las leyes internas que rigen la interacción dialéctica entre los objetos que se incorporan al conocimiento y los instrumentos cognoscitivos que permiten tal incorporación. Pero el estudio quedaría inconcluso si no retomáramos el análisis desde otra perspectiva, centrándonos no ya en el individuo sino en los elementos que constituyen la referencia objetiva del conocimiento, es decir, en una centración sobre el objeto, en lugar de la centración anterior sobre el sujeto. En lo que sigue, nos proponemos mostrar que este cambio de centración es necesario para poder llegar a una síntesis totalizadora que sirva como esquema explicativo en la interpretación de la evolución del conocimiento tanto en la escala individual como en la escala social.

En la Introducción a esta obra se puso de manifiesto que la tesis empirista es insostenible, es decir, que no hay percepción o experiencia "pura". La "lectura de la experiencia supone una *aplicación* de instrumentos cognoscitivos —que hacen la lectura posible— así como una atribución de relaciones entre los objetos —que provee las cadenas causales entre eventos. El intermediario entre los objetos y los eventos, por una parte, y los instrumentos cognoscitivos, por la otra, es —como lo hemos visto repetidas veces— la acción. La manera en que la acción participa del proceso cognoscitivo, en la perspectiva que brinda la epistemología genética, le da a esta posición epistemológica un sentido preciso que converge con la línea de pensamiento ya clásico en la filosofía dialéctica, pero que le otorga al mismo tiempo una identidad propia dentro de ella, en la medida en que la "práctica" es analizada en términos de las acciones que la constituyen y que aparecen como factores esenciales en el punto de partida del proceso cognoscitivo.

Pero la acción, excepto en el comienzo mismo del período sensorio-motriz, no tiene lugar solamente en función de impulsos internos; no se genera de manera exclusivamente centrípeta. Bien pronto, en la experiencia del niño, las situaciones con las cuales se enfrenta son generadas por su entorno social, y las cosas aparecen en contextos que les otorgan significaciones especiales. No se asimilan objetos "puros". Se asimilan situaciones en las cuales los objetos desempeñan ciertos papeles y no otros. Cuando el sistema de comunicación del niño con su entorno social se hace más complejo y más rico, y particularmente cuando el lenguaje se convierte en medio dominante, lo que podríamos llamar la experiencia directa de los objetos comienza a quedar subordinada, en ciertas situaciones, al sistema de significaciones que le otorga el medio social. El problema que aquí surge para la epistemología genética es explicar cómo queda la asimilación, en dichos casos, condicionada por tal sistema social de significaciones y en qué medida la interpretación de cada experiencia particular depende de ellas.

La historia de la ciencia nos ofrece, sin duda, el ejemplo más claro de un predominio de la influencia del medio social en el proceso cognoscitivo. Comenzaremos por ella, antes de replantear el problema en el nivel del desarrollo intelectual del niño, terreno en el cual, dada la insuficiencia de datos experimentales y de documentación histórica, el análisis debe permanecer en un nivel más especulativo.

Cuando analizamos la naturaleza de la revolución científica del siglo XVII, en el capítulo X, pusimos de manifiesto que el aporte fundamental de quienes la llevaron a cabo no consistió en un refinamiento metodológico ni en un progreso considerable en los instrumentos de observación, sino en una reformulación de los problemas que eran objeto de estudio científico. La revolución en la mecánica no se produjo por el hallazgo de nuevas respuestas a las preguntas clásicas sobre el movimiento, sino por el hallazgo de nuevas preguntas que permitieron formular los problemas de manera distinta. Las nuevas formulaciones permitieron, a su vez, un tratamiento matemático del problema y la concepción de situaciones experimentales en las cuales las soluciones eran verificables o refutables. Es desde esta perspectiva que nosotros caracterizamos la revolución científica como un cambio de "marco epistémico". Este concepto de marco epistémico, que introducimos así, es diferente de lo que Thomas Kuhn entiende por "paradigma". Recordemos brevemente el punto de vista de Kuhn[1] antes de desarrollar nuestra propia concepción. Más adelante volveremos más en detalle sobre la teoría de Kuhn y sobre los debates a los que ha dado lugar. De esta manera podremos situar más claramente las diferencias entre ambas perspectivas.

[1] Thomas S. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas*, México, FCE, 1971.

Kuhn desarrolló una teoría de las revoluciones científicas según la cual cada época aparecía caracterizada por lo que él llama un "paradigma", es decir, una concepción particular que establece cuál es el tipo de ideal científico, de modelo a seguir en la investigación científica. Los criterios por los cuales una investigación es considerada como científicamente aceptable, los criterios que determinan las líneas de investigación quedan, según Kuhn, determinados en gran medida por el paradigma dominante en ese lugar y momento histórico. Nosotros estamos básicamente de acuerdo con Kuhn y desde cierto punto de vista nuestro concepto de "marco epistémico" engloba el paradigma kuhniano. Sin embargo, el concepto introducido por Kuhn está más ligado a la sociología del conocimiento que a la epistemología misma, a la cual pertenece nuestro concepto de marco epistémico.

El aparato conceptual y el conjunto de las teorías que constituyen la ciencia aceptada en un momento histórico dado son factores que determinan de manera predominante las direcciones de la investigación científica. Estas últimas resultan, en general, de un consenso de la comunidad científica, que en la mayor parte de los casos permanece implícito. Ciertas líneas de investigación se destacan, otras encuentran poco o ningún apoyo. Algunos temas pasan a estar de "moda" y se hipertrofian en detrimento de otros. Todo esto ocurre, en general, dentro de un mismo marco epistémico, pero puede llegar a cambiarlo cuando la profundización de un tema lleva a descubrimientos que permiten, ya sea la adquisición de instrumentos para abordar problemas hasta entonces inaccesibles, o bien la formulación de nuevas preguntas que modifican la perspectiva desde la cual se conduce la investigación.

Desde este punto de vista, resulta claro que la concentración de esfuerzos en el estudio de ciertos tipos de fenómenos, en ciertos problemas particulares o con el auxilio de determinados equipos y métodos de observación, desempeña un papel predominante en la dirección que adquiere el desarrollo de las teorías científicas. A su vez, esta concentración de esfuerzos responde a diversos factores. Algunos son de inspiración puramente científica, como por ejemplo la necesidad de remover contradicciones en una teoría que ha demostrado ser aplicable a diversos dominios, o la búsqueda de explicación a fenómenos que desafían las teorías conocidas. En otros casos la presión o el estímulo provienen de sectores sociales que reclaman soluciones a problemas de carácter práctico. Tal es el caso de la tecnología aplicada a la industria, cuyo desarrollo ha dado lugar a descubrimientos fundamentales que abrieron nuevos campos a la investigación científica. La tecnología militar ha sido quizá, en todas las épocas, el ejemplo más característico. Para citar un ejemplo clásico: buena parte de la mecánica fue desarrollada a impulsos de los requerimientos de la artillería. La mecánica de Euler es un caso típico. Por otra parte, es

razonable suponer que la física nuclear no hubiera logrado algunos de sus avances más espectaculares sin el estímulo y los poderosos medios puestos a su disposición por los gobiernos interesados en la utilización de la energía nuclear para la guerra. Es fácilmente concebible que si los estímulos hubieran sido diferentes, otros campos de la ciencia pudieran haber recibido mayor atención por parte de un gran número de los mejores cerebros de nuestro tiempo; otros descubrimientos hubieran tenido lugar, otras teorías científicas hubieran surgido para dar cuenta de ellos. Un gran sector del conocimiento científico se va pues expandiendo no de manera estrictamente racional, en respuesta a una problemática interna, sino de manera un tanto arbitraria y por un conjunto de impulsos orientados por requerimientos externos impuestos por la sociedad.

Está claro que el proceso no es unidireccional. No puede olvidarse que las ideas básicas sobre la energía nuclear fueron generadas en la investigación científica pura, y que fueron hombres de ciencia —algunos de los más brillantes físicos de la historia— quienes estimularon el interés militar en la nueva forma de energía.

También, y con cierta frecuencia, el punto de partida de un avance espectacular en una rama de la ciencia ha provenido de un descubrimiento al azar, o de avances logrados en otras ramas. Se encuentran ejemplos clásicos de esto último en numerosos casos de desarrollos en la matemática que han permitido el tratamiento de problemas físicos hasta entonces inaccesibles a la teoría. Nuevos temas, o nuevos campos de investigación, pueden pasar a dominar el interés general y engendrar incluso nuevos paradigmas.

No es necesario extenderse más en este tipo de consideraciones, ampliamente analizadas en una vasta literatura. Nuestro propósito al hacer estas referencias es servirnos de ellas para establecer algunas distinciones que juzgamos esenciales en el análisis de las interacciones entre ciencia y sociedad, a fin de identificar aquellos elementos que inciden sobre el desarrollo de los sistemas cognoscitivos, tanto a nivel psicogenético como histórico.

Una primera distinción que debemos hacer en las consideraciones precedentes consiste en diferenciar entre el estímulo o el rechazo de ciertos temas como dignos de apoyo, y la aceptación o la negación de ciertos esquemas conceptuales como válidos. Que se haya decidido invertir tanto esfuerzo en la energía nuclear y no se haya hecho lo mismo con el problema de la conversión de la energía solar es una decisión en favor de ciertos temas en virtud de sus aplicaciones prácticas, y no por razones vinculadas a una concepción particular de naturaleza epistemológica. Que este favoritismo de temas haya impulsado la ciencia en determinada dirección, y que la elección de una dirección diferente hubiera producido desarrollos que hubiesen podido modificar el panorama actual de la teoría física, es una cues-

tión que aparece sólo como un subproducto de aquella *decisión práctica*, y no inspirado por razones epistémicas, aun cuando pueda tener profundas consecuencias para el desarrollo del conocimiento científico.

Una cuestión muy diferente es la aceptación o el rechazo de conceptos, ideas o temas a los cuales se les niega en un momento histórico dado el carácter de "científicos" por estar fuera del aparato conceptual que la comunidad científica, por consenso explícito o tácito, considera como el único válido. La mecánica de Newton tardó más de treinta años en ser aceptada en Francia. No se le objetaba ningún error de cálculo, ni se aducía ningún resultado experimental que contradijera sus afirmaciones. Simplemente, no se la aceptaba como "Física", por cuanto no daba *explicaciones físicas* de los fenómenos. Era el concepto mismo de explicación física lo que estaba en tela de juicio. Por esta razón, no es un hecho casual (ni mucho menos trivial) que haya sido un escritor con inclinaciones filosóficas —Voltaire— quien desempeñó el papel principal en la introducción de las ideas newtonianas en "el continente". Algunas décadas después, las "explicaciones" *a la Newton* no sólo eran universalmente aceptadas, sino que pasaron a ser el modelo mismo de la explicación científica. En el siglo XIX una mentalidad científica del calibre de Helmholtz dirá que para él ninguna explicación de un fenómeno físico es suficientemente clara hasta que no pueda ser expresada en términos de la mecánica newtoniana.

De aquí surgió el *mecanicismo* como paradigma científico indiscutible. Las corrientes *reduccionistas* que surgen en todos los campos de la ciencia (en especial en la química y en la biología, pero también en las ciencias del hombre) son el resultado de la imposición de dicho paradigma y habrán de determinar las características del pensamiento científico hasta nuestro siglo.

Todo esto es ya un lugar común para todos aquellos que se han preocupado por analizar la influencia que han tenido en los investigadores las concepciones o "creencias" aceptadas en cada momento histórico. Sin embargo, el problema relativo a los *mecanismos* de acción de dichas concepciones o creencias de un cierto grupo social (en este caso la comunidad científica) sobre el desarrollo cognoscitivo de un *individuo*, no aparece dilucidado en Kuhn ni en ninguno de los autores que se han ocupado de la ideología en la ciencia. Por el contrario, éste es el tema central que nos preocupa en este capítulo, ya que es el punto preciso de pasaje de la sociología del conocimiento a la sociogénesis del conocimiento.

Un primer punto a tomar en cuenta, elemental pero importante, es que el tipo de paradigma al que hemos hecho referencia no se "impone" a partir de normas socialmente establecidas, como es el caso de la selección de temas de investigación, sino que constituye la manera natural

de considerar la ciencia en un período dado por cada individuo que se aboca a ella, sin imposición externa *explícita*. Es una concepción que ha pasado a ser parte inherente del saber aceptado y que se transmite con él, tan naturalmente como se transmite el lenguaje hablado o escrito de una generación a la siguiente. De aquí que propongamos designar este tipo de paradigma como "paradigma epistémico", por oposición al "paradigma social" descrito anteriormente.

¿Cuál es el mecanismo por el cual actúa un paradigma epistémico? La respuesta a esta pregunta exige una profundización del planteo que hemos hecho al comienzo del capítulo. Nuestra tesis (por el momento restringida al sujeto adulto) será la siguiente: Como hemos señalado, un sujeto enfrenta el mundo de la experiencia con un arsenal de instrumentos cognoscitivos que le permiten asimilar, y por consiguiente interpretar, los datos que recibe de los objetos circundantes, pero también asimilar la información que le es transmitida por la sociedad en la cual está inmerso. Esta última información se refiere a objetos y a situaciones ya interpretadas por dicha sociedad. A partir de la adolescencia, cuando se han desarrollado las estructuras lógicas fundamentales que habrán de constituir los instrumentos básicos de su desarrollo cognoscitivo posterior, el sujeto dispone ya, además de dichos instrumentos, de una concepción del mundo (*Weltanschauung*) que condiciona la asimilación ulterior de cualquier experiencia. Esta concepción del mundo actúa a diferentes niveles y de diferente manera en cada nivel, como trataremos de demostrar en lo que sigue. Pero a fin de aclarar nuestra tesis, expondremos primero un ejemplo histórico que consideramos profundamente significativo.

Es un hecho bien conocido hoy que contemporáneamente con la época de esplendor de la civilización griega, la ciencia china adquirió un desarrollo extraordinario. La obra monumental de J. Nedham, *Ciencia y civilización en China*, es, a este respecto, una fuente documental inestimable. Una comparación entre las características de la ciencia griega y la ciencia china arroja mucha luz sobre el tema del presente capítulo. Hemos visto en el capítulo V que Aristóteles —y toda la mecánica desde él hasta Galileo— no sólo no llegó a formular el principio de inercia, sino que rechazó como absurda toda idea de movimiento permanente no ocasionado por la acción constante de una fuerza. Por el contrario, cinco siglos a.C. encontramos la siguiente afirmación de un pensador chino: "La cesación del movimiento se debe a una fuerza opuesta. Si no hay fuerza opuesta, el movimiento nunca se detendrá." Debían pasar más de dos mil años antes que la ciencia occidental llegara a esta concepción. Más sorprendente aún es el hecho de que el enunciado arriba citado no fuera considerado como un descubrimiento extraordinario, sino como un hecho natural y evidente. La frase que sigue a la cita que hemos hecho dice, en el texto chino: "Esto es tan cierto como que una vaca no es un caballo."

¿A qué se debe que una afirmación que era absurda para los griegos fuera una verdad clara y evidente para los chinos? Aquí encontramos, a nuestro juicio, una de las raíces de la relación entre ciencia e ideología. Más aún, creemos que la respuesta a esta pregunta ilumina uno de los mecanismos epistemológicos por el cual la ideología de una sociedad determinada condiciona el tipo de ciencia que en ella se desarrolla.

La concepción aristotélica del mundo era completamente estática. El "estado natural" de los objetos del mundo físico era, para ellos, el reposo. Todo movimiento (excepto el movimiento eterno de los astros sobre los que actúa un impulso divino) era considerado una "violencia" ejercida sobre un objeto. El movimiento, por consiguiente, requería una fuerza. Cuando cesaba la fuerza, el objeto volvía a su estado natural de reposo. Es fácil ver por qué, dentro de esta concepción, el principio de inercia resultaba *inconcebible.*

Para los chinos, por el contrario, el mundo estaba en constante devenir. El movimiento, el flujo continuo, era el estado natural de todas las cosas que hay en el universo. El movimiento no necesita, por consiguiente, ser explicado. Sólo el cambio de movimiento, y en particular el reposo, necesitan ser explicados. La fuerza interviene para modificar o para detener. Si sobre un objeto no se ejerce ninguna fuerza, continúa su movimiento imperturbable. Quizá la fundamentación filosófico-religiosa de esta idea se encuentra en la afirmación de Yang Hsing (año 20 a.C.): "Toutes les choses sont engendrés par des impulsions intrinsèques, ce n'est que son affaiblissement et sa décadence qui procedent partiellement du dehors." ["Todas las cosas son engendradas por impulsiones intrínsecas; sólo su debilitamiento y su decadencia provienen parcialmente de afuera."]

Difícilmente pueda encontrarse un ejemplo más claro de cómo dos concepciones del mundo (*Weltanschauungen*) diferentes conducen a *explicaciones físicas* diferentes. La diferencia entre un sistema explicativo y otro no era metodológica ni de concepción de la ciencia. Era una diferencia ideológica que se traduce por un marco epistémico diferente. De aquí surge también, claramente, que lo "absurdo" y lo "evidente" es siempre relativo a un cierto marco epistémico y está en buena parte determinado por la ideología dominante. No puede explicarse de otra manera el destino del principio de inercia en el mundo occidental: absurdo para los griegos; descubrimiento de una verdad inherente al mundo físico para el siglo XVII; evidente y casi trivial para el siglo XIX (hasta el punto que un estudiante que no "viera" que el principio es evidente sería considerado como seriamente deficiente); ni absurdo, ni obvio, ni verdadero, ni falso para el siglo XX, cuando es aceptado solamente en virtud de la función que cumple en la teoría física.

El estatismo de los griegos fue uno de los mayores obstáculos (aun-

que no el único que introdujeron) para el desarrollo de la ciencia occidental. Fue un obstáculo ideológico, no científico. La ruptura definitiva con el pensamiento aristotélico en los siglos XVI y XVII será, pues, una ruptura ideológica, que conducirá a la introducción de un marco epistémico diferente y finalmente a la imposición de un nuevo *paradigma epistémico*.

Nuestra interpretación tiene, sin duda, relación directa con la posición de Gaston Bachelard, quien ha sido el primero en señalar la importancia de lo que él llama "obstáculo epistemológico" y "ruptura epistemológica" en el desarrollo de la ciencia. Ya nos hemos referido a este tema en el capítulo VII y hemos puesto de manifiesto la coincidencia de las dos posiciones, aunque también hemos señalado algunas diferencias profundas sobre las cuales es necesario volver ahora con más detalle.

En efecto, G. Bachelard considera una "ruptura" total entre las concepciones precientíficas y científicas, al mismo tiempo que identifica como el mayor "obstáculo epistemológico" el irracionalismo precientífico. Nosotros creemos, por una parte, que hay una mayor continuidad entre el pensamiento precientífico y el científico, en tanto los mecanismos en juego en el proceso cognoscitivo son los mismos; y, por otra, consideramos que hay un cierto tipo de "ruptura" *cada vez* que se pasa de un estadio al otro, tanto en la ciencia como en la psicogénesis. Podemos aceptar sin dificultad que se trata de una ruptura, pero en el sentido de un cambio de marco epistémico.

Para nosotros, en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico.

Hasta aquí hemos considerado un solo ejemplo de influencia ideológica en las concepciones científicas. Consideraremos otros que muestran otra forma de relación. Una vez más, la comparación entre los chinos y los griegos de la época clásica resultará ilustrativa.

La escuela de los sofistas griegos es bien conocida, aunque ha sido considerada muchas veces como una curiosidad histórica, como uno de los muchos hechos sorprendentes producidos por el "milagro" griego, sin parangón con otros pueblos de la Antigüedad. No es, sin embargo, una simple casualidad que en otras dos grandes civiliza-

ciones de la Antigüedad, la china y la hindú, haya habido períodos similares. Es Ignace Kuo Pao-Koh en su tesis *Deux sophistes chinois: Hounei Che Hui Shih y Kong-Svuen Long* [Presses Universitaires de France, París, 1953] quien señaló que las condiciones político-sociales en la época de la aparición de los sofistas chinos son similares a las que se encuentran en India y en Grecia en la época de sus respectivas escuelas de sofistas. En los tres casos se trata de un período de culminación de la propia civilización, seguido de desastres militares y políticos para los grupos gobernantes, que condujeron a la decadencia de las instituciones tradicionales. En China, este período corresponde a la descomposición del régimen feudal y a la liquidación de su tipo de organización social. Aquí se encuentra, según Fung-Yu-Lan, el origen del racionalismo chino, su interés por la argumentación lógica y la aparición de la Escuela Dialéctica, en cuya culminación surge la escuela de sofistas. En su *History of Chinese philosophy*,[2] Fung-Yu-Lan, caracteriza este período como sigue: "Se trata de una época de transición durante la cual las instituciones del pasado habían perdido su autoridad, y las de la nueva época no habían aún recibido su formulación definitiva. Era, pues, inevitablemente un período de incertidumbre y de divergencias." El período griego posterior a las guerras Médicas presenta las mismas características, así como la época en la cual florece en la India la escuela negativista del budismo (Nagarjuna, Aryadeva).

En los tres ejemplos, la derrota de un orden histórico y su remplazo por otro, el derrumbe de instituciones y la ruptura de la "tradición", llevan a poner en duda todo aquello que había constituido la base de la sociedad, incluyendo sus creencias y su "saber". "Nada puede afirmarse"; "Toda verdad es contradictoria", se repetirá en uno y otro caso. El *çunya* de los hidúes (la nada, el vacío) proviene de aquí. La realidad es *çunya*, pero aun la afirmación de *çunya* es contradictoria, y también habrá que negarla. La realidad es, pues, *çunya çunyata* (el vacío del vacío). Y así sucesivamente. Los griegos demostrarán que el movimiento es imposible, que la flecha lanzada al espacio está inmóvil, que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Los chinos demostrarán que "un caballo blanco no es un caballo". Los hindúes demostrarán que nada puede "ser", ni "no ser", ni "ser y no ser", ni "ni ser, ni no ser".

En los tres casos, se niega el "saber constituido". En los tres casos, esta negación, erigida en ideología, fuerza el análisis lógico del saber constituido hasta sus últimas consecuencias.

Aquí tenemos una forma diferente de influencia ideológica, más directamente inspirada en hechos políticos y sociales que en el caso

[2] Fung-Yu-Lan, *A history of Chinese philosophy*, Princeton, Princeton University Press, 1953.

anterior, donde predominaba un *Weltanschauung* de naturaleza filosófico-religiosa. Dejamos abierta la cuestión, que escapa a los límites de esta obra, acerca del origen de esta *Weltanschauung* (que también —podría argüirse— habría sido generada por una ideología que, en última instancia, será de todos modos siempre de carácter político-social).

Los ejemplos que hemos tomado de la Antigüedad —tanto respecto al principio de inercia como a las escuelas de sofistas— han sido elegidos porque en uno y otro caso se trata de ejemplos más o menos puros, es decir, de situaciones donde el contexto histórico está suficientemente claro como para poder, en cierta manera, aislar el efecto que estábamos estudiando. En el devenir histórico los hechos no suelen ser tan claros, ni los efectos aislables. En general, el avance científico, la búsqueda de ciertas formas de explicación, la aceptación o el rechazo de conceptos y teorías de cierto tipo, responden a un juego de interacciones complejas donde factores sociales y exigencias internas del propio sistema cognoscitivo se complementan y se refuerzan, o se oponen y se atenúan. ¿Cómo se sitúan las consideraciones precedentes dentro del marco de la gran polémica desatada poco después de mediados de siglo acerca del significado de las teorías científicas, particularmente en torno a la posición de Kuhn? Veamos esta última con más detalle.

La noción de "paradigma" dentro de la teoría de Kuhn no es susceptible de una definición precisa. Uno de sus críticos encontró 22 sentidos diferentes en el uso de dicho término dentro de la obra básica de Kuhn. En formulaciones posteriores, Kuhn reconoce que ha hecho uso del término en diversos sentidos, pero sostiene que todos ellos pueden reducirse a sólo dos. En su presentación al *Symposium on the Structure of Scientific Theories*, celebrado en Urbana (USA) en marzo de 1969, Kuhn aclara ambos sentidos básicos y le da un nombre específico a cada uno:[3]

a] *Matriz disciplinaria* (*disciplinary matrix*) o paradigma en sentido estricto. Este tipo de paradigma podría ser definido como "un cuerpo característico de creencias y concepciones que abarcan todos los compromisos compartidos ('shared commitments') de un grupo científico".

b] *Ejemplares* (*exemplars*): soluciones típicas de problemas concretos que el grupo científico acepta como característicos de la teoría.

El segundo sentido de paradigma es importante puesto que, de acuerdo con Kuhn, cuando un paradigma domina la actividad de

[3] Cf. Kuhn, "Second thoughts on paradigms", presentación al referido Symposium. Este trabajo está incluido en F. Suppes (comp.) *The structure of scientific theories*, University of Illinois Press, 1977.

una comunidad científica, no sólo determina cuáles son las teorías y leyes que se sostienen como válidas, sino también cuáles problemas y métodos de solución son reconocidos como científicos.

Como es bien sabido, para Kuhn la ciencia es un proceso discontinuo. Hay períodos durante los cuales el científico trabaja dentro de un paradigma aceptado por la comunidad a la cual pertenece (matriz disciplinaria). Los principios básicos de dicho paradigma no son cuestionados. Los estudiantes de ciencia reciben su "formación" dentro del mismo y son ejercitados en la solución de los "ejemplares" paradigmáticos. La ciencia que ellos practiquen —que Kuhn llama "ciencia normal"— consistirá en la solución de otros problemas que están dentro del campo de aplicación de las teorías que constituyen el paradigma. Su objetivo es lo que Kuhn llama *puzzle-solving*: problemas que están pendientes de solución y que se supone *deberían* ser resueltos con los instrumentos teóricos que proveen las teorías aceptadas aunque no hayan sido resueltos hasta ese momento. Tan enmarcada está esta actividad dentro de los marcos conceptuales del paradigma vigente —afirma Kuhn— que cuando un científico fracasa en la solución de uno de esos problemas, se toma como fracaso personal del científico y *no de las teorías que aplica*. Cuando tales fracasos se suceden y queda un amplio campo de problemas sin resolver —pese a intentos repetidos de científicos de indudable capacidad— el marco teórico mismo comenzará a ser cuestionado y sobrevendrá una *crisis* en esa rama de la ciencia. Pero las teorías no serán por eso abandonadas hasta que no aparezcan otras nuevas, es decir, hasta que se constituya un nuevo paradigma —en el primer sentido (matriz disciplinaria)— que sea capaz de *desalojar* al anterior. Es el momento de una *revolución científica*. A la investigación científica que conduce a ese cambio de paradigma la llama Kuhn "ciencia revolucionaria" (en contraste con la "ciencia normal").

El desarrollo de la ciencia queda así caracterizado por Kuhn como largos períodos de "ciencia normal" con intervalos excepcionales de "ciencia revolucionaria". Hasta aquí nuestro acuerdo. Kuhn es indiscutiblemente un buen historiador de la ciencia, y su manera de dar cuenta de cómo la ciencia se ha desarrollado coincide *a grandes rasgos* con la nuestra. Pero aquí termina también nuestro acuerdo: las implicaciones epistemológicas que extrae Kuhn son fundamentalmente distintas de las nuestras. En nuestra opinión eso se debe a que Kuhn toma la historia como "memoria de la ciencia" y no como "laboratorio epistemológico", según la acertada distinción de Dijksterhuis que hemos utilizado ya en otros capítulos. Antes de establecer nuestras diferencias, veamos más a fondo la posición de Kuhn, así como la de otros filósofos de la ciencia que se definen a sí mismos de acuerdo o en contraposición con él.

Kuhn, siguiendo una línea que fue vigorosamente sostenida por

Russell Hanson[4] —y en cierta manera por Karl Popper—[5] sostiene, en contra del empirismo lógico, la no existencia de un lenguaje observacional que pudiera ser *neutro*, en el sentido de ser independiente de toda teoría. Hanson se refirió a esta posición como "the theory-ladenness of all observational statements".[6] Para Kuhn, la manera en que los hombres de ciencia *observan el mundo* depende de las teorías —los paradigmas— que han aceptado como válidas. Es cierto que las teorías "se ajustan a los hechos", pero esto sólo es posible porque hay *información que ha sido transformada en hechos* y que ni siquiera existía para los paradigmas precedentes.

Kuhn se separa explícitamente de Popper en la concepción de este último acerca de la verosimilitud y la refutabilidad de las teorías.

Kuhn rechaza el refutacionismo de Popper destacando el hecho de que muchas teorías fueron rechazadas antes de ser sometidas a "tests", y —lo que es más flagrante— muchas de ellas sobrevivieron largo tiempo después de que un cierto número de sus aserciones fueron refutadas por la experiencia. Esto conduce a una segunda divergencia, ya más profunda, entre ambos autores.

Para Popper hay criterios bien definidos para decidir entre teorías rivales (verosimilitud y refutabilidad). Hay, por consiguiente, un método preciso que explica el *progreso* de la ciencia. "En ciencia (y sólo en ciencia) podemos decir que hay genuino progreso: que hoy conocemos más que antes." Kuhn, por el contrario, no acepta que haya continuidad en la evolución científica, ni que haya mecanismos claros que permitan sustituir un paradigma por otro. Él *comprueba* el hecho de que un paradigma es *desalojado* históricamente por otro, sin que haya normas cuya aplicación explique cómo ocurre. Más aún, su concepción de paradigma torna imposible establecer criterios que permitan comparar dos de ellos entre sí para establecer la superioridad de uno sobre el otro. En ello consiste precisamente su idea de la *inconmensurabilidad* de los paradigmas. De aquí surge la frecuente acusación de irracionalista que le han hecho sus críticos: en la concepción de Kuhn no hay lugar para el progreso científico.

Desde una posición parcialmente similar, Feyerabend ha llevado esta última concepción de Kuhn a sus últimas consecuencias. Ambos concuerdan en que no es posible comparar las teorías con la experiencia (¡no hay refutación absoluta de aquéllas por ésta!) ni es posible comparar las teorías entre sí. Pero Feyerabend rechazará el concepto de "ciencia normal" que imputa a lo que él llama una posición

[4] Norwood Russell Hanson, *Patterns of discovery*, Cambridge University Press, 1958.

[5] Karl Popper, *La lógica del descubrimiento científico*.

[6] Aproximadamente: "el cargamento teórico de todos los enunciados observacionales".

monista. No se trata, para él, del dominio absoluto de un paradigma (o de una teoría que luego será desalojada por otra). En cada momento coexisten varias teorías en pugna, contradictorias entre sí, y aun autocontradictorias. El científico usa una u otra según su conveniencia. Feyerabend preconiza una posición que él llama *pluralista*, para la cual provee cierta evidencia histórica.

Dentro de este grupo de filósofos de la ciencia ha sobresalido, más recientemente, Imre Lakatos, discípulo de Popper. Lakatos intenta salvar la teoría de la ciencia de las consecuencias irracionalistas de Kuhn, y del "anarquismo epistemológico" de Feyerabend. Para ello retoma posiciones de Popper, con las modificaciones necesarias a fin de reparar las demoledoras objeciones de sus críticos. Su tesis principal es que el análisis de la dinámica de la ciencia no debe enfocarse a través de teorías aisladas, sino de *secuencias de teorías relacionadas entre sí*, que él llama "programas de investigación" (*research programs*). En cierto sentido, el programa de investigación de Lakatos ocupará el lugar del paradigma de Kuhn, agregándole un "pluralismo" *à la* Feyerabend. . . Pero como lo hace este último y también Popper, Lakatos rechaza el concepto de "ciencia normal" como correspondiendo a una posición dogmática y acrítica que en modo alguno representa la posición de un hombre de ciencia. El principal objetivo de Lakatos consiste en reintroducir en la ciencia una racionalidad de tipo popperiano (que había sido destruida por Kuhn y por Feyerabend). He aquí cómo caracteriza la oposición Popper-Kuhn:

"Para Popper el cambio en la ciencia es racional, o por lo menos racionalmente reconstruible, y cae dentro del dominio de la *lógica del descubrimiento*. Para Kuhn, el cambio científico —de un 'paradigma' a otro— es una conversión mística que no es, ni puede ser, gobernada por reglas de la razón, y que cae totalmente dentro del dominio de la *psicología (social) del descubrimiento*. El cambio científico es una especie de cambio religioso." Y agrega:

"El choque entre Popper y Kuhn no es un problema meramente técnico dentro de la epistemología: concierne nuestros valores intelectuales centrales, y tiene implicación no sólo para la física teórica sino también para las ciencias sociales subdesarrolladas y aun para la moral y la filosofía política. Puesto que en la ciencia no hay otra manera de juzgar una teoría excepto por estimación del número, la fe y la energía vocal de sus sostenedores, esto debe ser así y más aún en las ciencias sociales: la verdad reside en el poder. De esta manera, la posición de Kuhn reivindica, sin duda sin intención, el *credo* político básico de los maniacos religiosos contemporáneos ('estudiantes revolucionarios')."[7]

[7] I. Lakatos, "Falsification and methodology os scientific research programs", p. 93,

Lakatos se equivoca en la interpretación de Kuhn a quien —como muchos otros críticos— acusa de seguir "the mob-rule".[8] Kuhn, mejor apoyado en la historia de la ciencia que Lakatos, puede responder fácilmente a esta acusación (dejemos a los estudiantes responder a Lakatos sobre el final de la cita). Volveremos luego sobre este problema. Ahora nos centraremos en el problema epistemológico que está aquí en juego.

En la justificación de su posición epistemológica Lakatos concede a Kuhn que la crítica de este último a la teoría de la refutación de Popper (*falsificationism*) es parcialmente justa: no hay, en efecto, "experimentos cruciales" que puedan destronar "instantáneamente" una teoría. Pero el *experimentum crucis* es sólo una de las formas de refutabilidad (la forma "dogmática" o "ingenua"). Hay además una segunda forma, que Lakatos también atribuye a Popper: el refutacionalismo sofisticado (*sophisticated falsificationism*). Lakatos visualiza su propia contribución como una versión elaborada del "refutacionismo sofisticado" al estilo popperiano, y considera que ella "es suficiente para escapar a las estructuras de Kuhn".

El refutacionismo sofisticado desplaza el problema: en lugar de someter a test una teoría dada, se trata de evaluar *una serie de teorías* (un programa de investigación). Para el refutacionismo ingenuo una teoría es refutada por una experiencia (es decir, la refutación se obtiene cuando un enunciado que expresa el resultado de una observación es contradictorio con un enunciado de la teoría). Para el refutacionismo sofisticado una teoría es *refutada por otra teoría,* no por una experiencia.

Si intentamos comparar las posiciones de los cuatro filósofos de la ciencia que hemos considerado sucintamente (Popper, Kuhn, Feyerabend y Lakatos), podemos tomar dos ejes de referencia, en forma de dos pares de alternativas:

a] *Racionalidad versus irracionalidad*: Popper y Lakatos están con la primer alternativa; Feyerabend, claramente con la segunda; Kuhn, con la segunda pero con oscilaciones. El anarquismo epistemológico de Feyerabend[9] borra la distinción entre "objetivo" y "subjetivo", así como entre "racional" e "irracional". Kuhn pretende salvar un resto de racionalidad basándose en las reglas de juego de la práctica de una comunidad científica, pero no indica "mecanismos racionales" del cambio científico ni criterios para señalar *progreso* alguno en la ciencia. Popper y Lakatos buscan la racionalidad —y, por consi-

en *Criticism and the growth of knowledge*, por I. Lakatos y A. Musgrave, Cambridge University Press, 1970.

[8] Lakatos, *op. cit.*, p. 178: "Thus, in Kuhn's view scientific revolution is irrational, a matter for mob psychology".

[9] P. Feyerabend, *Against method: outline of an anarchistic theory of knowledge*, Radner and Winokur, 1970.

guiente, salvar la noción de progreso científico — a través de criterios para determinar cuándo y cómo una teoría es sustituida por otra.

b] *Metodología descriptiva versus metodología normativa.* Kuhn y Feyerabend intentan describir *ex post facto* cómo procede la ciencia y cómo ha tenido lugar su desarrollo histórico (aun cuando la conclusión sea que no hay "desarrollo" en el sentido de un proceso acumulativo que implique "progreso científico"). Popper y Lakatos establecen una "heurística", una metodología que fija *normas*. Ellos no sólo distinguen entre ciencia y seudociencia, sino que formulan *reglas* que regulan el comportamiento científico.

Curiosamente los cuatro recurren a la historia de la ciencia para sostener sus asertos. Los cuatro extraen conclusiones diferentes de la misma historia. Feyerabend está del lado de Kuhn en los dos pares de alternativas arriba enunciados. Pero Kuhn ve en la historia una secuencia de paradigmas en la cual cada uno perdura hasta que es desalojado por otro. Feyerabend, por el contrario, descubre la coexistencia de paradigmas en pugna, la proliferación de teorías e hipótesis contradictorias entre sí, entre las cuales sólo algunas llegan a predominar. Popper y Lakatos también aparecen del mismo lado en las dicotomías que hemos señalado. Pero Popper ve en la historia a científicos que formulan conjeturas audaces y teorías arriesgadas para someterlas al tribunal de la experiencia, y luego sepultarlas si son heridas de muerte por observaciones que las contradicen. Lakatos ve, por el contrario, teorías que integran "programas de investigación", y que se confrontan entre sí para establecer quién tiene mayores méritos para ser retenido.

A la lista de estos cuatro historiadores-filósofos hubiéramos debido sumar los nombres de N. Russell Hanson y Stephen Toulmin. Los seis tuvieron el mérito conjunto de haber mostrado la insuficiencia del análisis que realizó el neopositivismo para dar cuenta del conocimiento científico. Ellos demolieron, a partir de la década de los cincuenta (aunque Popper haya comenzado esta obra mucho antes), la concepción que restringía el análisis de la ciencia a un proceso de reconstrucción racional, prescindiendo totalmente del proceso de descubrimiento. Pero a partir de allí comienzan las divergencias. Todos están de acuerdo en que el análisis de la ciencia no puede reducirse a la *justificación* de las teorías; pero difieren entre sí acerca de cómo hay que introducir el proceso de descubrimiento. Las diferencias son patéticas. Para los empiristas lógicos había una "lógica de la justificación", pero no una "lógica del descubrimiento". Para Popper no hay lógica de la justificación; sólo hay requerimientos generales para evaluar hipótesis, sin que ello llegue a constituir una lógica del descubrimiento. Para Hanson hay una lógica del descubrimiento y una lógica de la justificación, pero son distintas. Para Fayerabend no hay ni lógica de la justificación, ni lógica del descubrimiento.

Los elementos de análisis que hemos provisto a lo largo de esta obra nos permiten suponer que es posible poner un cierto orden en este caos. Para ello debemos identificar previamente los problemas que a nuestro juicio están mal planteados en esta discusión. La historia muestra con frecuencia que cuando un grupo de científicos de gran capacidad y erudición difieren tan fundamentalmente, es porque algo falla en la formulación de los problemas sobre los cuales discrepan.

Ya en la Introducción señalamos algunos de los puntos básicos que pueden servir de apoyo a nuestro análisis. Nuestro punto de partida es la *continuidad* en el desarrollo del sistema cognoscitivo, desde el niño hasta el hombre de ciencia, pasando por el adulto "normal" (no sofisticado por la ciencia). Esa continuidad no puede ser "postulada", sino que debe ser el resultado de una investigación *ex post facto*. Creemos que el análisis comparativo entre la psicogénesis y la historia de la ciencia realizado en este libro muestra cuál es el sentido de esa continuidad y cuáles son sus alcances. Desde la física aristotélica y medieval, con sus sorprendentes coincidencias de método y contenido con las concepciones de un niño o un adolescente, hasta las ramas más elaboradas de la ciencia contemporánea con niveles de abstracción fuera del alcance del niño o del adulto no científico, los *mecanismos* en acción muestran caracteres comunes muy sorprendentes. Pero esa continuidad de los mecanismos que regulan el desarrollo cognoscitivo, *no excluyen las discontinuidades* en el proceso, sino que por el contrario las determinan. Hemos insistido desde la Introducción en que los únicos factores realmente omnipresentes en los desarrollos cognoscitivos —tanto en la historia de la ciencia como en la psicogénesis— son de naturaleza funcional y no estructural. Dichos factores funcionales están vinculados a la asimilación de lo que es nuevo a las precedentes estructuras, así como a la acomodación de éstas a lo que es nuevo objeto de conocimiento.

El aspecto *funcional* del desarrollo cognoscitivo explica la relativa estabilidad de las estructuras adquiridas, el proceso de desequilibración de una estructura, y el proceso de reequilibración del sistema en una estructura de orden superior. Está claro que el pasaje de una estructura a otra constituye una *discontinuidad*, un salto. Está claro también que dicho pasaje no es predecible, ni está sujeto a normas. Y este planteo demuestra, asimismo, que las estructuras adquiridas tienen una estabilidad interna que les permite resistir a las "perturbaciones" (por ejemplo a los intentos de refutación directa). Hasta aquí estamos con Kuhn (y parcialmente con Feyerabend) contra Popper.

Sin embargo, las restructuraciones no son saltos en el vacío: tienen una lógica interna puesta de manifiesto al nivel psicogenético desde hace más de medio siglo, y que se ha intentado demostrar en los

capítulos precedentes al nivel de la constitución de teorías científicas. Y aquí estamos no sólo contra Kuhn y Feyerabend, sino contra todo el grupo que ha sido objeto del análisis precedente. Porque aun Popper y Lakatos, en su intento de dar racionalidad al desarrollo de la ciencia, y de justificar el progreso científico, se limitan a formular *normas metodológicas* para establecer la aceptabilidad o el rechazo de una teoría (Popper), o criterios, también metodológicos, para decidir acerca de la superioridad de una teoría sobre otra (Lakatos). Pero ambos dejan de lado el problema *epistemológico*. Éste reside para nosotros en establecer en qué consiste el pasaje de una teoría T, de nivel inferior, a otra teoría T', de nivel superior, que es un problema *distinto* del que formula Lakatos acerca de *cómo se establece* que T' es superior a T. Algunos de los mecanismos en juego han sido puestos de manifiesto en el pasaje de una a otra de las grandes etapas que hemos intentado develar en la historia de la geometría, del álgebra y de la mecánica expuesta en los capítulos precedentes, y que resumiremos en el capítulo de conclusiones generales. Ellos nos muestran que hay una vección sobre la base de la cual es posible dar un significado preciso a la expresión "teoría de nivel superior", y aclaran además en qué sentido se puede hablar de una lógica interna del proceso que no es la lógica del descubrimiento a la que aluden los autores que hemos considerado previamente.

La lección que surge del presente capítulo es un tanto extraña. Los neopositivistas adoptaron una posición *a priori* sobre la irrelevancia del proceso de descubrimiento para lo que ellos consideraron como el objetivo fundamental de la filosofía de la ciencia: *justificar* la validez del conocimiento científico. En flagrante contradicción interna, no buscaron ninguna *base empírica* para sus afirmaciones, adoptadas como dogmas. Por su parte, los críticos *à la* Popper o *à la* Lakatos, rechazan el *empirismo* como posición filosótica acerca de los fundamentos del conocimiento. Pero tampoco ellos distinguen entre la aceptación o rechazo del empirismo como "explicación" del origen del conocimiento, y la indiscutible necesidad de dar una *base empírica* a sus afirmaciones epistemológicas (a falta de la cual se permanece en el terreno de la filosofía especulativa). En el caso de Kuhn' la situación es aún más desconcertante pues en el trabajo antes mencionado,[10] para explicar cómo aprende un estudiante de ciencia sus "ejemplares", hace un intento por reconstruir cómo aprende un niño "lo que es un pato", sin preocuparse por investigar *empíricamente* (es decir, con niños de carne y hueso) si es así como los niños aprenden. Varias décadas de investigaciones con niños, desde la perspectiva de la psicología genética, han demostrado que *no es así* como aprenden los niños. Curiosamente Kuhn cae, en su análisis, en una posición de corte neopositivista. . . la misma que se empeñó en destruir.

[10] Kuhn, "Second thoughts on paradigms", en *op. cit.*

El rechazo de la investigación empírica para determinar el *proceso real* de desarrollo cognoscitivo no puede explicarse de otra manera que por un preconcepto, una posición *a priori* sobre la ciencia —o más específicamente, las ciencias. Tales prejuicios son, estrictamente hablando, parte constitutiva de una ideología que condiciona la dirección y todos los "resultados" del análisis.

En los diversos capítulos de esta obra hemos tratado de demostrar una de las hipótesis formulada ya en la Introducción: la existencia de una cierta continuidad funcional entre el sujeto "natural" precientífico y el sujeto científico (que permanece siendo un sujeto "natural" en tanto que, fuera de su trabajo científico y técnico, no defiende ni aplica una epistemología filosófica particular). A partir de tal continuidad funcional, se puede afirmar una generalidad mucho mayor de los dos caracteres que hemos reconocido en todo conocimiento científico: una inconsciencia relativa de su propio mecanismo y un devenir continuo en su construcción. En efecto, en la medida en que el análisis epistemológico del pensamiento científico se ve obligado a remontarse a etapas precedentes constituidas por elaboraciones cognoscitivas que corresponden a niveles precientíficos, se llega por vía recursiva, en sentido retrospectivo, a encontrar estructuraciones cada vez más inconscientes y más dependientes de su propia historia anterior. Estas dos verificaciones conducen finalmente a una consecuencia que consideramos fundamental para una epistemología que intenta ser objetiva y no puramente especulativa: *que la fuente de todo conocimiento debe buscarse, por pasos sucesivos, hasta el nivel mismo de las acciones.*

La formulación precedente requiere diversas aclaraciones para poder ubicarla en su contexto apropiado. Hemos hablado de "un devenir continuo en su construcción", pero tal devenir no implica, sin embargo, continuidad en el sentido matemático (función continua o curva continua). Es, como hemos insistido reiteradamente, un devenir que presenta rupturas y saltos, desequilibrios y reequilibraciones.

Es necesario, sin embargo, destacar un aspecto de fundamental importancia para el tema del presente capítulo. El remontarnos a los niveles precientíficos hasta el nivel mismo de las acciones no significa —como ya lo hemos indicado— que debamos considerar solamente el desarrollo del sujeto frente a un objeto que está "dado" independientemente de todo contexto social. En la interacción dialéctica entre el sujeto y el objeto, este último se presenta inmerso en un sistema de relaciones con características muy diversas. Por una parte, la relación sujeto-objeto puede estar mediatizada por las interpretaciones que provienen del contexto social en el cual se mueve el sujeto (relaciones con otros sujetos, lecturas, etc.). Por otra parte, los objetos funcionan ya de cierta manera —socialmente establecida— en relación con otros objetos o con otros sujetos. En el proceso de interac-

ción, ni el sujeto ni el objeto son, por consiguiente, neutros. Y éste es el punto exacto de intersección entre conocimiento e ideología. Con esta formulación, podría parecer sorprendente que encontremos en todo el desarrollo de la historia de la ciencia, tanto como en la psicogénesis, la repetición de formas similares de adquisición de los conocimientos, cualquiera que sea su nivel. Si la influencia de la sociedad es tan fuerte, ¿cómo se explica que en todos los períodos de la historia, así como en los niños de todos los grupos sociales y de cualquier país, encontremos los mismos procesos cognoscitivos en acción?

Para encontrar la respuesta, debemos diferenciar, por una parte, los mecanismos de adquisición de conocimiento que un sujeto tiene a su disposición y, por la otra, la forma en que es presentado el objeto que va a ser asimilado a tal sujeto. La sociedad modifica la última, pero no los primeros. La significación asignada a un objeto en un momento dado, dentro del contexto de sus relaciones con otros objetos, puede depender, en gran medida, de cómo la sociedad establece o modifica la relación entre el sujeto y el objeto. Pero la forma en la cual tal significación es adquirida depende de los mecanismos cognoscitivos del sujeto y no de factor alguno que sea provisto por la sociedad.

En otros términos, cómo un sujeto asimila un objeto, depende del sujeto mismo; qué es lo que él asimila, depende, al mismo tiempo, de su propia capacidad y de la sociedad que le provee la componente contextual de la significación del objeto.

Que la atención del sujeto sea dirigida a ciertos objetos (o situaciones) y no a otros; que los objetos, sean situados en ciertos contextos y no en otros; que las acciones sobre los objetos sean dirigidas en cierta forma y no en otras: todo esto está fuertemente influido por el medio social y cultural (o por lo que hemos llamado el paradigma social). Pero todas estas condiciones no modifican *los mecanismos* que necesita esa especie biológica tan particular que es el ser humano para *adquirir* el conocimiento de dichos objetos, en *dichos* contextos, con todas las significaciones particulares socialmente determinadas que ya le hayan sido asignadas.

CAPÍTULO X
CONCLUSIONES GENERALES

Al llegar al término de estos intentos de comparación entre la historia de las ciencias y la psicogénesis de los conocimientos, nos parece útil volverlos a reexaminar, no para resumir nuestros capítulos, sino a fin de poner en evidencia los aspectos más generales que habremos de clasificar en tres categorías:

Los *instrumentos* comunes de adquisición de conocimientos; los *procesos* que resultan de su aplicación; y, finalmente, los *mecanismos de conjunto* que sintetizan estos últimos y le imprimen una vección o una dirección general.

I. LOS INSTRUMENTOS

La fuente general de los instrumentos de adquisición, sobre los cuales hemos insistido sólo con referencia a ciertos temas pero que se encuentran en todos ellos y a todos los niveles, es la *asimilación* de los objetos o eventos a los esquemas o a las estructuras anteriores del sujeto, que van desde los reflejos en el nivel de las psicogénesis hasta las formas más elevadas del pensamiento científico. Desde el punto de vista psicológico, la asimilación se opone a la asociación, concebida como una simple relación de similitudes o de continuidad entre los objetos conocidos o que están por conocerse. La asociación se presenta así como si las actividades del sujeto no intervinieran en el conocimiento y como si éste sólo consistiera en una acumulación de observables bien clasificados, a la manera de los contenidos de una caja o de un gran armario. Desde el punto de vista científico, el positivismo ha permanecido ligado a este empirismo asociacionista cuando ha querido reducir la ciencia a un conjunto de "hechos" simplemente registrados antes de ser descritos por medio de un lenguaje puro constituido por la sintaxis y la semántica propias de la lógica y de las matemáticas.

La asimilación consiste por el contrario en considerar el conocimiento como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto. Este último constituye un contenido al cual impone el sujeto una forma extraída de sus estructuras anteriores pero ajustadas a este contenido, sobre todo si él es nuevo, modificando un tanto el esquema asimilador por medio de *acomodaciones*, es decir, de diferenciaciones en función del objeto que se habrá de asimilar.

El carácter absolutamente general de estas asimilaciones, que están en acción desde los niveles biológicos bajo sus aspectos materiales (asimilación de alimentos, asimilación clorofílica, etc.) y se prolongan bajo formas funcionales en los niveles cognoscitivos (asimilaciones sensorio-motrices, conceptuales, etc.), encierra consecuencias epistemológicas evidentes: no sólo la naturaleza asimiladora del conocimiento contradice naturalmente todo empirismo, puesto que remplaza el concepto de un conocimiento-copia por la noción de una estructuración continua, sino que se opone también a todo apriorismo, puesto que si la mayor parte de las formas biológicas de la asimilación son hereditarias, lo propio de las asimilaciones cognoscitivas es construir sin cesar nuevos esquemas en función de los precedentes, o acomodarse a los anteriores. El carácter asimilador de todo conocimiento impone pues una epistemología constructivista, en el sentido de un estructuralismo genético o constructivo, puesto que asimilar equivale a estructurar. Cada uno de nuestros capítulos ha desarrollado ejemplos tanto en la marcha de la historia como en el desarrollo mental, y la razón principal de las convergencias observadas en estos dos dominios es precisamente que el sujeto desempeña un papel activo en todo conocimiento y que la propiedad más general de sus actividades es la asimilación.

En cuanto a los instrumentos de conocimiento que engendra la asimilación, son naturalmente las abstracciones y las generalizaciones que cada epistemología ha invocado siempre, pero a las cuales la asimilación permite dar un sentido más rico que sus significaciones tradicionales. En efecto, la asimilación destaca tanto las formas o esquemas creados por el sujeto como los contenidos que tiene por función estructurar. La oposición más clara que hemos utilizado a este respecto corresponde a las dos formas de abstracción cuyas alternancias han sido destacadas a propósito del conocimiento físico, mientras que la segunda es la única que interviene en los progresos del conocimiento algebraico. La primera ha sido llamada "abstracción empírica" en el sentido de que se refiere a los objetos exteriores al sujeto, en los cuales este último comprueba ciertas propiedades para extraerlas y analizarlas independientemente. Sin embargo, en física, y *a fortiori* en matemáticas, nos encontramos en presencia de una abstracción que ha sido llamada "refleja" o "reflexiva" puesto que se refiere a las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conduce a construir. Pero como hemos señalado a menudo en diversos capítulos, esta abstracción es reflexiva en dos sentidos inseparables: por una parte, un "reflejamiento" hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a uno superior (por ejemplo de la acción a la representación) y, por otra, una "reflexión" en el sentido mental, que permite una reorganización sobre el nuevo plano de lo que ha sido extraído del plano precedente. En física, como ya lo he-

mos visto, hay una alternancia continua entre la abstracción empírica, que se ejerce sobre los contenidos, y la reflexiva que extrae de las formas anteriores los elementos para construir nuevas formas adaptadas a dichos contenidos. En matemáticas, por el contrario, donde es el sujeto quien elabora a la vez formas y contenidos (o, si uno prefiere, donde todo es ya "forma" antes de devenir contenido), la abstracción reflexiva es naturalmente la única que opera, aun en los casos de una operación que es utilizada solamente a título instrumental para dar lugar sólo posteriormente a una tematización que permita construir una nueva teoría.

A estas variedades diferentes de abstracciones corresponden formas distintas de generalizaciones. En tanto que nos atenemos solamente a contenidos empíricos, dichas generalizaciones son sólo de naturaleza extensional y constituyen pasajes de "algunos" a "todos", o bien de leyes particulares a leyes más generales, sin reorganizaciones de las primeras. La abstracción reflexiva permite por el contrario la formación de generalizaciones completivas y aun constructivas, que constituyen síntesis nuevas en el seno de las cuales las leyes particulares adquieren nuevas significaciones.

Conviene por otra parte observar que estas nociones de abstracción reflexiva y de generalizaciones constructivas o completivas conducen en primer término a una interpretación específica de las matemáticas. En lugar de considerar a éstas como un sistema de deducciones referidas a entidades dadas desde el comienzo, sean cuasiempíricas (como por ejemplo el objeto cualquiera de Gonseth), lingüísticas, o ideales (con el platonismo), decir que ellas son extraídas de las acciones u operaciones del sujeto significa:

a] que toda acción del sujeto está siempre coordinada con otras acciones ya que no existen acciones aisladas y que sus significaciones son siempre solidarias;

b] que de estas coordinaciones se extraen formas que pueden ser desprendidas de sus contenidos;

c] que estas formas se coordinan a su vez y dan entonces nacimiento, por reflexión, a las operaciones fundamentales que constituyen el punto de partida de las estructuras lógico-algebraicas.

Decir que la abstracción reflexiva "extrae" su contenido de las acciones del sujeto no es pues en modo alguno una metáfora, sino la expresión de las actividades constructivas desde su mismo origen, sin que esto signifique que estén preformadas, o simplemente comprobadas como observables psicológicos, sino que son normativas y formativas a todos los niveles, aun a los más elementales. En cuanto a las generalizaciones completivas, consisten, desde el momento de la adjunción de un conocimiento nuevo a los anteriores, en retomar las partes a partir del todo, enriqueciéndolas en este proceso. Encontramos múltiples ejemplos desde en la física hasta en la biología, aun

cuando son mucho más numerosos en matemáticas. Es así por ejemplo que gracias a la teoría electrónica de la valencia, la tabla de Mendeleyev, concebida al principio como simple resultante de múltiples mediciones, se tornó un instrumento de nuevos descubrimientos.

II. LOS PROCESOS

Los instrumentos fundamentales de conocimiento que acabamos de recordar dan lugar a diversos procesos que puede ser igualmente útil resumir en algunas palabras. El más importante es sin duda la "búsqueda de razones" que justifiquen las abstracciones y generalizaciones. Desde sus orígenes, el positivismo lógico pretendió reducir la ciencia, como lo deseaba Augusto Compte, a una simple descripción de fenómenos. Pero en realidad, y aun sin confesar que lo hacen, toda mente científica vuelve tarde o temprano a la búsqueda de estas razones, y se ha notado a menudo el hecho de que excelentes físicos, después de una profesión de fe positivista descrita en el prefacio de su obra, la contradicen en el cuerpo mismo de sus escritos persiguiendo claramente un análisis de "causas". Se podría citar como ejemplo de esta tendencia invencible a remontarse a las "razones" la evolución actual de la lógica matemática. Si nos atenemos al lenguaje descriptivo, la lógica algebraica ha permanecido durante mucho tiempo en un punto de vista puramente extensional, de donde provienen "las tablas de verdad", aunque en realidad permanecen tan alejadas de la "verdad" que llegan a ese verdadero escándalo constituido por las implicaciones paradójicas según las cuales $p > q$ es verdadera aun si no existe ninguna relación de verdad entre p y q. Sin embargo, podemos ver actualmente diseñarse un movimiento que tiende a admitir sólo vínculos necesarios y significativos tales que cada implicación repose en una razón (por ejemplo la lógica del "*entailment*" de Anderson y Belnap).[1] En matemáticas, se distinguen a partir de Cournot las demostraciones que verifican simplemente un teorema y las que además proveen sus razones. En física, se ha tornado general recurrir a modelos explicativos que demuestran en forma suficientemente clara que la generalidad de una ley no es suficiente para satisfacer la mente pues ésta tiene una necesidad incoercible de descubrir las razones subyacentes.

Este proceso general está de acuerdo con el lema de Leibniz según el cual *nil est sine ratione* y se acompaña de un correlativo que pone en evidencia (entre muchos otros índices) el papel del sujeto en el conocimiento: es el camino que consiste en situar todo evento real entre

[1] Alan Ross Anderson y Nuel D. Belnap, *Entailment: The logic of relevance and necessity*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1975.

un conjunto de posibles y una necesidad concebida como el único posible actualizado. En efecto, ni lo posible ni lo necesario son observables y ambos son producto de actividades inferenciales del sujeto. Pero como este último constituye de por sí, en tanto manifestación de un organismo vivo, una parte de la realidad, el enriquecimiento que el mismo adquiere situándose entre lo posible y lo necesario no conduce a un idealismo, sino a un sistema bipolar cuyos dos polos verifican solamente la dualidad de las formas debidas tanto a las asimilaciones del sujeto como a los contenidos debidos a la experiencia.

De esta dualidad resulta, por otra parte, un tercer proceso fundamental que es el doble movimiento que conduce las asimilaciones y acomodaciones a un equilibrio dinámico entre las integraciones y las diferenciaciones. Sobre el terreno de la física está claro que estas dos direcciones expresan las relaciones complejas de un sujeto que se aproxima sin cesar al objeto, y de un objeto que retrocede a medida que los descubrimientos de nuevas propiedades cognoscibles presentan problemas nuevos. Pero en el dominio matemático, no es menos evidente que las integraciones proactivas de nuevas estructuras de conjunto van acompañadas de diferenciaciones retroactivas que llegan a introducir nuevas diferenciaciones en el seno de los subsistemas cuya lista parecía ya agotada.

De aquí surge otro proceso general cuyas manifestaciones se han tornado muy visibles en el seno de las fases recientes del constructivismo matemático, mientras que lo era mucho menos en el platonismo de las generaciones precedentes: es el pasaje de una fase anterior donde ciertas operaciones desempeñan sólo un papel instrumental sin toma de conciencia suficiente, a una fase ulterior donde estas mismas operaciones son tematizadas y dan lugar a nuevas teorías (de esto hemos visto muchos ejemplos en el capítulo sobre el desarrollo del álgebra).

Por otra parte, las tematizaciones dan lugar a un nuevo proceso sobre el cual conviene insistir: es el prolongamiento de las abstracciones reflexivas descritas más arriba, en lo que podríamos llamar las abstracciones "reflexionadas", las cuales son producto de tematizaciones. Un ejemplo lo podemos encontrar a propósito de los grupos abstractos que sucedieron a los múltiples grupos particulares que se conocían antes, tal como lo hemos señalado en el capítulo sobre el álgebra.

III. LOS MECANISMOS DE CONJUNTO

Nos queda aún por resumir lo que hemos visto acerca de los dos grandes mecanismos de conjunto que hemos encontrado sin cesar y que, por otra parte, no son sino una misma cosa en cuanto a su significación general: el pasaje del *intra-* al *inter-*, y de allí al *trans-*, por una parte y, por otra, el mecanismo general de equilibración.

En lo que concierne al primero, ha resultado ser el más general de los aspectos comunes a la psicogénesis y a la historia de las ciencias. La razón de ello es simple: el *intra-* conduce al descubrimiento de un conjunto de propiedades en los objetos o en los eventos, pero sin que haya otras explicaciones que no sean locales y particulares. Las "razones" que se pueden establecer no pueden entonces encontrarse sino en las relaciones inter-objetales, lo que equivale a decir que deben encontrarse en las transformaciones que son, por su propia naturaleza, características del segundo nivel: *inter-*. Estas transformaciones, una vez descubiertas, demandan el establecimiento de vínculos entre ellas, lo que nos lleva a la construcción de las estructuras características del *trans-*.

Resulta claro, sin embargo, que si el *intra-* y el *inter-* alcanzan ciertas formas de equilibrio, son, por otra parte, fuente de múltiples desequilibrios, como lo hemos visto en particular en los capítulos sobre el álgebra. Resulta así que las formas de equilibrio dinámico más completas no se logran sino a través de las estructuras que se han tornado estables en función de conexiones entre transformaciones y de los intercambios con el exterior. Presentan esa característica fundamental de lo que podemos llamar el rebasamiento cognoscitivo (integración de una estructura limitada en una más amplia) según el cual lo que ha sido rebasado está siempre integrado en el rebasante.

Para terminar estas conclusiones, conviene además recordar que la ambición permanente de la epistemología genética ha sido mostrar que el desarrollo espontáneo de los conocimientos extrae su fuente de las organizaciones biológicas para llegar en sus etapas avanzadas a la construcción de las estructuras lógico-matemáticas. Nosotros esperamos que esta obra, al mostrar el papel de la psicogénesis y sus convergencias notables con la historia del pensamiento científico, contribuirá a reforzar tal programa, aun cuando no le hayamos prestado atención al estrecho parentesco que uno de nosotros ha encontrado al efectuar comparaciones posibles entre los mecanismos biológicos y cognoscitivos.[2]

A este respecto tenemos que mencionar los trabajos recientes de Prigogine sobre las estructuras disipativas que parecen mostrar la posibilidad de ir aún más lejos y que la serie "organismo-comportamiento-psicogénesis sensorio-motriz-psicogénesis conceptual" podría ser completada en su parte inferior vinculando las estructuras biológicas (y por consiguiente las cognoscitivas) a ciertas formas de equilibrio dinámico que tienen relación con la física (y cuyo estudio ha sido provocado precisamente por la necesidad de vincular entre sí estas dos disciplinas).

[2] J. Piaget, *Le comportement, moteur de l'évolution*, París, Gallimard, 1976, Collection Idées, núm. 354.

En efecto, hay por lo menos cinco analogías estrechas entre estas "estructuras disipativas" y lo que nosotros consideramos como equilibraciones y equilibrios cognoscitivos. En primer lugar, se trata de equilibrios dinámicos que implican intercambios con el exterior y que son distintos de los equilibrios sin intercambio. En segundo lugar, son estos intercambios los que por medio de reglajes internos estabilizan las estructuras. En tercer lugar, la equilibración como tal está caracterizada en ambos casos por una "auto-organización". En cuarto lugar, como consecuencia de "inestabilidades sucesivas", "los estados que tienen lugar en un instante dado no pueden ser comprendidos sino a partir de su historia pasada".[3] Finalmente y sobre todo, la estabilidad de un sistema es función de su complejidad. No hay que asombrarse por consiguiente de que Prigogine, al término del estudio que hemos citado, pueda sostener que su concepción se aplica a un gran número de situaciones "que comprenden el funcionamiento de las estructuras cognoscitivas en el sentido de Piaget" y que "al incluir al observador, al hombre en la naturaleza, están en completo acuerdo con la idea de base de la epistemología genética".[4] Subsiste sin embargo una importante diferencia, pero ella también opone lo cognoscitivo a lo biológico en general: se trata de lo que ya hemos comentado en el caso del rebasamiento de una estructura de conocimiento por una más amplia: lo que ha sido rebasado está integrado en lo que lo ha rebasado, lo que permite la continuidad del saber que llega a completarse en las matemáticas puras.

[3] I. Prigogine, "Physique et métaphysique", en *Connaissance scientifique et philosophie*, Bruselas, Académie royales des sciences, 1975, p. 312.
[4] *Ibid.*, p. 316.

impreso en mújca impresor, s.a. de c.v.
camelia núm. 4
col. el manto, iztapalapa
enero de 2008

abajo histórico que realizaron los autores para la presente obra tuvo como guía la concepción del desarrollo cognoscitivo elaborado por la epistemología genética. El análisis histórico que exponen está limitado a las grandes líneas del desarrollo de las matemáticas y de la mecánica, los dos campos donde el material psicogenético es más abundante y más claro. La opinión más generalizada, tanto entre los hombres de ciencia como entre los historiadores de la ciencia, es que no existe ninguna relación entre la formación de las nociones y operaciones en los estadios más elementales, y su evolución en los niveles superiores. A esta opinión suele agregarse una creencia frecuente, aunque menos general: que la significación epistemológica de un instrumento de conocimiento es independiente de su modo de construcción, en tanto este último está vinculado a la historia y, eventualmente, a la psicogénesis, mientras que aquél depende del funcionamiento de este instrumento en su sistema sincrónico y actual de interacciones cognoscitivas, irreductibles, según esta hipótesis, a las consideraciones diacrónicas y, por ende, a sus etapas anteriores.

El objetivo de la obra no es comparar contenidos cognoscitivos entre las explicaciones de ciertos fenómenos que tratan de dar niños y adolescentes, por una parte, y las concepciones o teorías que se sostuvieron en algunos períodos de la historia, por la otra. Si bien tales comparaciones son posibles —en el texto se hace referencia a ellas— y en no pocas ocasiones presentan coincidencias altamente sorprendentes, el que un niño de 8 años describa de la misma manera que lo hacía Aristóteles la trayectoria de un proyectil, o que tenga un concepto de "fuerza" muy próximo al que tenían Buridan u Oresme en el siglo XIV, no significa que Aristóteles, Buridan y Oresme tuvieran la misma "edad operativa" que un niño de 8 años. Una vez que se verifican dichas coincidencias, comienza el análisis epistemológico para establecer por qué razón un genio determinado (por ejemplo, Aristóteles) no pudo superar ciertas barreras en su intento de explicar fenómenos naturales.

De Jean Piaget hemos publicado **Biología y conocimiento, Adaptación vital y psicología de la inteligencia, Investigaciones sobre la contradicción** y **La equilibración de las estructuras cognoscitivas.**



